ALGEBRA SUPERIORE.

TRATTATO

DI

ALGEBRA SUPERIORE

DI

GIOVANNI NOVI

Professore di Algebra Superiore nella R. Università di Pisa.

PARTE PRIMA.

ANALISI ALGEBRICA.

FIRENZE.

FELICE LE MONNIER.

—

1863.

PREFAZIONE.

L'algebra per opera dei geometri moderni si è venuta accrescendo di tali e sì notevoli perfezionamenti, che gli antichi trattati non più bastano al suo efficace insegnamento nè più rispondono alle sue condizioni presenti. Da ciò il bisogno, generalmente avvertito, di un nuovo trattato che, esponendo le teorie moderne, guidasse la gioventù studiosa per via non troppo disagevole alla intelligenza dei grandi problemi della scienza. Un'opera di tal fatta era stata promessa dal professor Betti, [1] corrono già varii anni, e la promessa era lietamente accolta da quanti coltivano simili dottrine, poichè niuno in Italia e pochissimi fuori sarebbero stati più del professore pisano in grado di soddisfare alla pubblica espettazione. Ma nel 1859 il professor Betti fu chiamato a dettar lezioni di analisi superiore, ed il nuovo ufficio obbligandolo ad altri studi, lo distolse dal mandare ad effetto il suo primo pensiero; nè potremmo dolercene, poichè questi studi ci hanno procurato l'eccellente *Teorica delle funzioni ellittiche* e la bella memoria *Sopra le funzioni algebriche di una variabile complessa*, la quale ultima ci conforta a sperare di vedere propagate fra noi le profonde ricerche dell'illustre geometra tedesco Riemann, scevre dalle gravi difficoltà che ai più le rendono ardue.

Succeduti noi al professor Betti nella cattedra di algebra superiore dell'Università di Pisa, fummo dallo stesso esortati ad

[1] Nella Prefazione alla traduzione italiana dell'Algebra elementare di Giuseppe Bertrand.

effettuare la promessa che le nuove circostanze impedivano a lui di adempire. Per agevolarci questo cómpito, ingombro di non lievi difficoltà, egli pose gentilmente a nostra disposizione i manoscritti delle lezioni fatte negli anni 1858 e 59, e ci offrì i suoi consigli e i suoi aiuti con quella schietta benevolenza che rende sì preziosa la sua amicizia a noi ed a quanti lo conoscono. [1]

Dichiarate così le cagioni che ci hanno persuasi a scrivere questo trattato e gli obblighi che ci legano al nostro insigne collega, crediamo non affatto inutile dire dello scopo che ci siamo prefissi e del modo con cui ci siamo ingegnati a raggiungerlo.

Noi abbiamo mirato a due fini, cioè, per primo comporre un'opera che potesse servire a tutti i bisogni dell'insegnamento superiore, e per secondo, offrire ai giovani che, compiuti gli studi universitari, si sentissero indotti a continuare nell'aspro cammino della scienza, un libro d'introduzione alla lettura delle Memorie dei grandi geometri dell'età nostra.

Per soddisfare al primo oggetto, abbiamo esposto con tutta la chiarezza desiderabile le teorie fondamentali, accompagnandole con quelle applicazioni che ci sono sembrate meglio opportune a farne comprendere l'importanza e la natura. Per áttuare il secondo divisamento ci siamo ampiamente giovati della ricca supellettile scientifica che si trova nelle raccolte sia nostrali sia straniere, citando sempre le fonti originali, ove i giovani possono attingere più larghe notizie e più profonde cognizioni.

Abbiamo divisa l'opera in tre parti. Nella prima si espone quanto si riferisce alla teoria delle serie, dei prodotti infiniti e delle frazioni continue; nella seconda, che volge intorno alle funzioni algebriche razionali, si troveranno le teorie dei determinanti, delle funzioni simmetriche, dell'eliminazione e quella importantissima e tutta moderna delle trasformazioni lineari per le funzioni omogenee; nella terza finalmente si tratta delle funzioni algebriche irrazionali, e vengono dichiarati i risultati a cui sono

[1] Tutte le volte che abbiamo inserito nel nostro trattato nuove dimostrazioni di speciali teoremi appartenenti al Prof. Betti, lo abbiamo notato espressamente.

giunti alcuni geometri moderni, quali Betti, Hermite, Kronecker, Weierstrass ec., circa alla risoluzione algebrica dell'equazioni.

Oggi pubblichiamo la sola prima parte, che distinguiamo col nome di *analisi algebrica*, per seguire l'esempio di altri geometri.

La teoria delle serie, come quella che è di grande utilità vuoi per le applicazioni, vuoi per le parti superiori dell'analisi matematica, abbiamo svolta con molta larghezza. L'importanza che di giorno in giorno va sempre più acquistando la teoria delle funzioni di una variabile complessa, ci ha persuasi a dimostrare in tutta la loro generalità i teoremi di maggior rilievo, che servono come di apparecchio allo studio dei lavori di Cauchy, Puiseux, Riemann, Weierstrass, Betti ec. Nel capitolo decimo abbiamo esposto con chiarezza, e indipendentemente dalla teoria dei prodotti infiniti, un teorema di molta importanza dovuto a Weierstrass, e risguardante una classe assai estesa di serie; lo che ci ha permesso di dimostrare con grandissima facilità due teoremi di Kummer. Di questo eminente geometra abbiamo pur dato un elegante metodo pel calcolo numerico delle serie, che ci è sembrato meritevole di essere conosciuto.

Nell'esposizione delle teorie dei prodotti infiniti e delle frazioni continue, che hanno minore importanza, abbiamo potuto essere più concisi: tuttavia non abbiamo tralasciato nulla di rilevante e siamo andati molto al di là dei limiti ordinari. Fra le funzioni esprimibili per prodotti infiniti, ci è piaciuto considerare le facoltà analitiche, la cui teoria è poco nota all'universale e che per la prima volta si leggerà in un'opera didascalica. Nel capitolo che vi abbiamo consacrato, ci lusinghiamo di essere riusciti a dare in poche pagine una idea precisa e chiara dei principii fondamentali di questa teoria, che deve a Vandermonde la sua origine e a Weierstrass il rigore delle sue deduzioni.

I due ultimi capitoli che trattano delle frazioni continue, oltre le teorie di maggiore importanza, contengono un bel teorema ottenuto recentemente da Heine, generalizzando talune ricerche di Gauss e di Eisenstein, e una nuova e semplice costruzione geometrica delle proprietà e dei valori delle ridotte, dovuta al

celebre geometra inglese Sylvester, e di cui il professor Betti ci ha dato una elegante dimostrazione.

Gli uomini autorevoli che si prenderanno la pena di leggere questo trattato, e i giovani ai quali specialmente lo destiniamo, giudicheranno se la via che abbiamo seguita è buona. Se i primi stimeranno esser noi riusciti a dare un concetto esatto dello stato dell'algebra moderna, e se i secondi troveranno che noi abbiam soddisfatto al duplice scopo che ci eravamo prefissi, saremo lieti di avere potuto dotare l'Italia di una opera da lunga pezza attesa, consultando più il nostro desiderio che le nostre debolissime forze; e ci reputeremo ampiamente ricompensati delle nostre fatiche.

ALGEBRA SUPERIORE.

INTRODUZIONE.

Le quantità che si considerano nelle matematiche si distinguono in *cognite* ed *incognite*, *costanti* e *variabili*. Le quantità cognite ed incognite si presentano in tutte quelle quistioni nelle quali si tratta di determinare il valore di talune quantità, supposto conosciuto quello di altre; le prime sono le incognite del problema, mentre le seconde sono le quantità cognite. Diconsi variabili quelle quantità che per ipotesi o per la natura della quistione che si tratta, sono capaci di ricevere diversi valori; costanti quelle che nel tempo stesso restano immutate. Così in una quistione di movimento si può considerare come costante la velocità e variabile la direzione del movimento, o invece variabile la velocità e costante la direzione. Se nel secondo caso si tratta di determinare la velocità, sarà questa l' incognita, e la direzione del movimento la quantità cognita.

Le variabili sono indipendenti o funzioni delle indipendenti. Le *variabili indipendenti* sono quelle che non dipendono da altre quantità nè fra di loro, in guisa che possono variare tutte quante o parte di esse, e ciascuna può prendere tutti i valori da $+\infty$ a $-\infty$. *Funzioni* di una o più variabili indipendenti, diconsi quelle variabili che sono determinate, tostochè lo sieno quelle da cui dipendono.

Per esempio: se abbiamo l'equazione $y=ax+b$, ove a, b sono due costanti, x ed y due variabili, è chiaro che prendendo x per variabile indipendente, y è funzione di x, poichè ad ogni valore di quest' ultima corrisponde un determinato valore della prima. Similmente è noto che la circonferenza di un cerchio varia

al variare del raggio; dunque la circonferenza è funzione del raggio, o ancora il raggio è funzione della circonferenza.

Per indicare una funzione di una o più variabili si usano le notazioni $f(x)$, $F(x)$, $\varphi(x, y)$, $\psi(x, y, z)$ ...., ove le lettere f, F, φ, ψ, ..., sono caratteristiche destinate a rappresentare la parola funzione.

Le funzioni si distribuiscono in due grandi classi, avuto riguardo alle operazioni di calcolo alle quali sono sottoposte le variabili da cui dipendono. Appartengono alla prima classe le funzioni *algebriche*, alla seconda le funzioni *trascendenti*.

Si chiamano algebriche quelle funzioni nelle quali le variabili sono soggette a un numero limitato delle seguenti operazioni: addizione, sottrazione, moltiplicazione, divisione, estrazione di radice d'indice primo. In qualunque altro caso le funzioni sono trascendenti.

Le funzioni algebriche si distinguono ancora in *razionali* ed *irrazionali*. Sono razionali quelle funzioni nelle quali le variabili non sono sottoposte ad alcuna estrazione di radice; irrazionali quelle che non soddisfano a questa condizione.

Tanto le funzioni razionali quanto le irrazionali possono essere *intere* o *fratte*. Una funzione algebrica è intera tutte le volte che non contiene la variabile nel denominatore; in caso contrario è fratta. Così le due funzioni $ax + b$ e $\dfrac{ax^2 + b}{c + dx}$ sono entrambe razionali, ma la prima è intera, la seconda fratta; le due funzioni $\sqrt{a^2 - x^2}$ e $\dfrac{\sqrt{a^2 - 2bx + x^2}}{ax}$ sono irrazionali, la prima intera, la seconda fratta.

Poichè in una funzione algebrica razionale ed intera le variabili sono sottoposte alle sole operazioni di addizione, sottrazione e moltiplicazione, è chiaro che una tale funzione sarà composta di un numero limitato di termini della forma $Ax^m y^n z^p$.... Se la variabile è una sola, allora la funzione avrà la forma generale

$$A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \cdots + A_m x^m ,$$

ove A_0, A_1, A_2, ... A_m indicano quantità costanti. Il più alto di tutti gli esponenti determina il *grado* della funzione; nell'esempio precedente la funzione è di grado m^{esimo}. Per le funzioni di più variabili il grado è dato dalla massima somma degli espo-

nenti delle variabili contenute in ciascun termine. Così l'espressione

$$Axy^3 + Bxy^2 + Cy + D,$$

è una funzione di 4° grado. Se il grado di una funzione di più variabili è costante per tutti i termini, la funzione si dice *omogenea*. Per esempio:

$$Ax^3 + Bx^2y + Cxy^2 + Dy^3,$$

è una funzione omogenea di 3° grado.

Una funzione razionale fratta, può sempre ridursi al quoziente di due funzioni razionali intere. Così nel caso di una sola variabile, la forma generale alla quale può sempre essere ridotta una funzione razionale fratta è

$$\frac{A_0 + A_1x + A_2x^2 + \ldots + A_mx^m}{B_0 + B_1x + B_2x^2 + \ldots + B_nx^n}.$$

Il numero $m - n$ è il grado della funzione.

L'Algebra ha per oggetto lo studio delle funzioni algebriche razionali ed irrazionali.

Le funzioni trascendenti sono innumerevoli e di svariatissima natura; ma fra esse se ne distinguono talune che si sono incontrate nelle matematiche elementari e che per questa ragione hanno ricevuto il nome di trascendenti elementari; voglio dire la funzione *esponenziale* a^x, la funzione *logaritmica* $\log x$, le funzioni *goniometriche* $\operatorname{sen} x$, $\cos x$, $\tan x$, $\cot x$, $\sec x$, $\operatorname{cosec} x$, e le funzioni *ciclometriche* $\operatorname{arc\,sen} x$, $\operatorname{arc\,cos} x$, $\operatorname{arc\,tan} x$, $\operatorname{arc\,cot} x$, $\operatorname{arc\,sec} x$, $\operatorname{arc\,cosec} x$. Le prime otto funzioni sono state già definite nell'*Algebra elementare* e nella *Trigonometria;* resta solo a precisare il significato che noi attribuiamo alle funzioni ciclometriche. In tutto il corso del nostro Trattato intenderemo per queste funzioni sempre il più piccolo arco che ha un dato *seno*, un dato *coseno* ec. Così avremo

$$\operatorname{arc\,sen} \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}, \quad \operatorname{arc\,sen} \frac{1 + \sqrt{5}}{4} = \frac{3}{10}\pi,$$

$$\operatorname{arc\,sen}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{\pi}{4}, \quad \operatorname{arc\,sen}(-1) = -\frac{\pi}{2},$$

$$\operatorname{arc\,cos} \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}, \quad \operatorname{arc\,cos} \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} = \frac{2}{5}\pi,$$

$$arc\ cos\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{3}{4}\pi, \quad arc\ cos\,(-1)=\pi \quad ,$$

$$arc\ tan\,\sqrt{3}=\frac{\pi}{3} \quad , \quad arc\ tan\,\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\pi}{6} \quad ,$$

$$arc\ tan\,(-1)=-\frac{\pi}{4} \quad , \quad arc\ tan\,(-\infty)=-\frac{\pi}{2}.$$

Una fra le quistioni più interessanti dell' Analisi è di esprimere le funzioni trascendenti mediante i segni ordinarii dell' Algebra. Ora le operazioni più semplici dell' Algebra sono l' addizione algebrica, la moltiplicazione e la divisione; e queste operazioni protratte indefinitamente, danno origine rispettivamente alle *serie*, ai *prodotti infiniti* e alle *frazioni continue*. Sono quindi queste le forme più semplici, sotto le quali si possono esprimere le funzioni trascendenti mediante segni algebrici.

La teoria elementare delle serie, dei prodotti infiniti e delle frazioni continue e l' applicazione alle trascendenti elementari, costituisce l' Analisi algebrica.

Lo studio dell' Analisi algebrica giova per la completa intelligenza di talune teorie dell' Algebra superiore, ed è introduzione indispensabile all' analisi infinitesimale; essa è come anello di congiunzione fra le matematiche elementari e le superiori. Laonde noi siamo naturalmente condotti a dividere questo nostro Trattato in tre Parti; 1ª Analisi algebrica; 2ª Funzioni razionali algebriche; 3ª Funzioni irrazionali algebriche.

PARTE PRIMA.

ANALISI ALGEBRICA.

CAPITOLO I.

NOZIONI SULLA TEORIA DELLE COMBINAZIONI.

Definizioni.

1. Con m elementi $a_1, a_2, \ldots, a_m$ si possono formare varii gruppi in due modi diversi. Si può supporre che ciascun gruppo debba contenere tutti gli elementi dati e che si debbano formare tutti i gruppi possibili che differiscono per la sola disposizione degli elementi; a questi gruppi si dà il nome di *permutazioni*.

Si possono anche formare tutti i gruppi possibili, ciascuno dei quali contenga n fra gli elementi dati; in questa ipotesi i gruppi possono differire o per gli elementi che contengono o per la diversa disposizione dei medesimi elementi. L'insieme dei primi gruppi forma tutte le *combinazioni* di m elementi presi n ad n; l'insieme dei primi e dei secondi gruppi, forma tutte le *disposizioni* di m elementi presi n ad n.

Il numero degli elementi contenuti in ciascun gruppo, costituisce la *classe* alla quale appartiene quel gruppo. Così le combinazioni 1 ad 1 appartengono alla prima classe; quelle 2 a 2 alla seconda classe, ec.

Esempio. Con tre elementi $a, b, c,$ si possono formare sei permutazioni

$$abc, acb, cab, bac, bca, cba,$$

tre combinazioni della seconda classe

$$ab, ac, bc,$$

sei disposizioni della seconda classe

$$ab, ba, ac, ca, bc, cb.$$

Permutazioni.

2. *Con* m *elementi si possono formare* 1 . 2 . 3 .... m *permutazioni.*

Si verifica facilmente che con 2 elementi si formano 1 . 2 permutazioni; con 3 elementi se ne formano 1 . 2 . 3, ec.; quindi avremo dimostrato il teorema generale, quando avremo provato che se è vero per m elementi è vero altresì per $m+1$ elementi.

Supponiamo conosciute le permutazioni di m elementi; per formarne una di $m+1$ elementi, prendiamo una qualunque fra le permutazioni degli m elementi dati, per es.

$$a_1 a_2 a_3 \dots a_m ,$$

e facciamo occupare in questo gruppo all'elemento a_{m+1} tutti i posti possibili, che sono evidentemente in numero di $m+1$. Così verremo a ripetere questa permutazione di m elementi $m+1$ volte; e operando al modo stesso con le altre permutazioni di m elementi, è chiaro che il numero delle permutazioni di $m+1$ elementi sarà dato da $1 . 2 . 3 \dots m(m+1)$.

3. Il ragionamento precedente suppone che tutti gli elementi sieno disuguali. Se taluni fra gli elementi dati sono eguali fra loro è chiaro che il numero delle permutazioni non può rimanere lo stesso; per vedere in qual modo va modificato, osserviamo che le permutazioni di m elementi si possono formare nella seguente maniera:

Prendiamo per prima permutazione il gruppo

$$a_1 a_2 a_3 \dots a_m ,$$

e permutiamo i soli due primi elementi a_1 e a_2; otterremo due permutazioni di m elementi. In ciascuna di queste facciamo occupare al terzo elemento a_3 tutti i posti possibili, rispetto agli altri due elementi a_1 e a_2, verremo così a formare sei permutazioni di m elementi, le quali provengono dal gruppo dato permutando in esso i soli primi tre elementi a_1, a_2, a_3. Con ciascuna di queste sei permutazioni procederemo al modo stesso, cioè faremo occupare al quarto elemento a_4 tutti i posti possibili rispetto ai tre precedenti a_1, a_2, a_3, e continuando così fino a che avremo esauriti tutti gli elementi, otterremo tutte le permutazioni della

classe m^{esima}. Da questo ragionamento segue con evidenza che se α elementi sono eguali fra loro, il numero delle permutazioni sarà eguale a

$$\frac{1 \, . \, 2 \, . \, 3 \ldots . \, m}{1 \, . \, 2 \, . \, 3 \ldots . \, \alpha};$$

e in generale indicando con Πn il prodotto dei numeri naturali da 1 fino ad n e supponendo che fra gli elementi dati ve ne siano α eguali fra di loro, β eguali fra di loro ma diversi dai precedenti, γ eguali fra di loro ec., il numero delle permutazioni sarà dato dalla formola

$$\frac{\Pi m}{\Pi\alpha \, . \, \Pi\beta \, . \, \Pi\gamma \ldots},$$

ove $\alpha + \beta + \gamma + \ldots$ è un numero intero non maggiore di m.

Se $m = n\alpha$, il numero delle permutazioni di m elementi di n specie è

$$\frac{\Pi m}{(\Pi\alpha)^n}.$$

4. L'operazione che ha per oggetto di passare da una permutazione di più elementi ad un'altra qualunque, si dice *sostituzione*. Se chiamiamo *trasposizione* la permutazione di due elementi, è chiaro che qualunque sostituzione equivale ad una serie di trasposizioni; così per passare dalla permutazione

$$a_1a_2a_3a_4a_5,$$

all'altra

$$a_4a_3a_5a_2a_1,$$

basta fare le trasposizioni (a_1, a_4), (a_2, a_3), (a_2, a_5), (a_1, a_2).

5. In una permutazione si dice che vi ha uno *spostamento*, se vi sono due elementi tali che il primo a cominciare dalla sinistra abbia un indice maggiore di quello del secondo. Così la permutazione $a_4a_3a_5a_2a_1$ contiene otto spostamenti a_4a_3, a_4a_2, a_4a_1, a_3a_2, a_3a_1, a_5a_2, a_5a_1, a_2a_1.

Nella permutazione

$$a_na_1a_2 \ldots . \, a_{n-1}a_{n+1} \ldots . \, a_m,$$

il numero degli spostamenti è $n - 1$; nella permutazione

$$a_m \, a_{m-1} \ldots . \, a_2 \, a_1:$$

questo numero è dato da $\frac{1}{2} m(m - 1)$.

6. Le permutazioni si distinguono in due classi; appartengono alla prima quelle che contengono un numero pari di spostamenti, alla seconda quelle che ne contengono un numero dispari.

Un criterio per riconoscere se due permutazioni appartengono alla stessa classe o a classi differenti è dato dal seguente teorema.

7. *Due permutazioni appartengono alla stessa classe o a classi differenti, secondochè la sostituzione corrispondente a queste due permutazioni equivale a un numero pari o a un numero dispari di trasposizioni.*

Se le trasposizioni si effettuano fra elementi contigui, il teorema è evidente; poichè la trasposizione di due elementi contigui aggiunge o toglie un solo spostamento.

Per dimostrare il teorema generale, consideriamo in prima il caso in cui si effettui una sola trasposizione fra due elementi qualunque.

Si abbia la permutazione

$$Aa_pBa_qC, \tag{1}$$

ove A rappresenta il gruppo di elementi che precede a_p, B il gruppo di quelli che sono compresi fra a_p e a_q, e che supponiamo essere in numero di n, C il gruppo che segue a_q e sia $q > p$. La permutazione che si deduce da (1) mediante la trasposizione a_pa_q sarà

$$Aa_qBa_pC. \tag{2}$$

Se nella permutazione (1) facciamo subire n trasposizioni successive verso la destra all'elemento a_p, e nella permutazione (2) facciamo subire $n+1$ trasposizioni successive verso la destra all'elemento a_q, otterremo in entrambi i casi l'unica permutazione

$$ABa_pa_qC.$$

Se n è un numero pari, l'ultima permutazione è della stessa classe della permutazione (1) e di classe differente della (2); se n è dispari avviene il contrario. Quindi le permutazioni (1) e (2) appartengono a classi differenti.

Da ciò segue con evidenza che se una permutazione si deduce da un'altra mediante un numero pari di trasposizioni, le due permutazioni appartengono alla stessa classe; se invece vi è bisogno di un numero dispari di trasposizioni, le classi delle due permutazioni saranno differenti.

8. Le permutazioni di m elementi contengono alternativamente un numero pari e un numero dispari di spostamenti, e poichè il numero totale delle permutazioni è pari, la metà delle permutazioni apparterrà alla prima classe, e l'altra metà alla seconda.

9. Se fra gli m elementi $a_1, a_2, \ldots, a_m$ ne prendiamo p ad arbitrio $a_1, a_2, \ldots, a_p$ e rimpiazziamo ciascun elemento col seguente e l'ultimo col primo, si dice che si fa subire a questi elementi una permutazione circolare, e la sostituzione corrispondente alle due permutazioni

$$a_1 a_2 a_3 \ldots a_{p-1} a_p\,,$$
$$a_2 a_3 a_4 \ldots a_p \;\; a_1\,,$$

si chiama *sostituzione circolare dell' ordine* p^{esimo}.

Una sostituzione circolare dell'ordine p^{esimo} equivale a $p-1$ trasposizioni, poichè per effettuarla basta permutare il primo elemento col secondo, poi col terzo, e così di seguito fino all'elemento p^{esimo}. Laonde *due permutazioni di* m *elementi, la seconda delle quali si deduce dalla prima mediante una sostituzione circolare dell' ordine* m^{esimo}, *apparterranno alla stessa classe o a classi differenti, secondochè* m *è un numero dispari* o *pari.*

10. *Qualunque sostituzione non circolare, equivale a più sostituzioni circolari effettuate simultaneamente sopra lettere differenti.*

Si abbiano due permutazioni diverse degli elementi $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_p$ e supponiamo che la sostituzione per passare dalla prima alla seconda non sia circolare. È chiaro che in virtù di questa sostituzione l'elemento a_1 sarà sostituito da un altro elemento a_h, per es., il quale sarà sostituito da un altro elemento a_k, e così di seguito finchè si ricada sull'elemento a_1. Gli elementi $a_1 a_h a_k \ldots$ avranno subìto una permutazione circolare. Se prendiamo un elemento non compreso nel gruppo precedente e operiamo in un modo analogo, formeremo un nuovo gruppo di elementi che avranno subìto egualmente una permutazione circolare, e via discorrendo sino a che avremo esauriti tutti gli elementi.

Esempio. La sostituzione corrispondente alle due permutazioni

$$a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7 a_8 a_9 a_{10} a_{11}\,,$$
$$a_8 a_{11} a_4 a_6 a_2 a_{10} a_1 a_7 a_5 a_3 a_9\,.$$

equivale alle tre sostituzioni circolari

$$(a_1 a_2 a_7),\ (a_2 a_{11} a_9 a_3),\ (a_3 a_4 a_6 a_{10}).$$

Lo stesso metodo si adopera per vedere se una sostituzione è circolare; così la sostituzione corrispondente alle due permutazioni

$$a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7 a_8 a_9,$$
$$a_4 a_8 a_1 a_7 a_2 a_9 a_5 a_6 a_3,$$

equivale all' unica sostituzione circolare

$$(a_1 a_4 a_7 a_5 a_2 a_8 a_6 a_9 a_3).$$

11. *Se* m *è il numero degli elementi contenuti in due permutazioni,* p *il numero delle sostituzioni circolari che equivalgono alla sostituzione unica in virtù della quale si passa dalla prima permutazione alla seconda, le due permutazioni apparterranno alla stessa classe o a classi diverse, secondochè* m — p *è un numero pari o dispari.*

Supponiamo che le p sostituzioni circolari di cui è parola nell' enunciato precedente si debbano effettuare sopra gruppi che contengono rispettivamente $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ elementi ciascuno; l' insieme di queste sostituzioni equivale a

$$(\alpha_1 - 1) + (\alpha_2 - 1) + \ldots + (\alpha_p - 1) = m - p$$

trasposizioni. Quindi la seconda permutazione può dedursi dalla prima mediante $m - p$ trasposizioni; lo che prova il teorema.

Osserviamo che nel numero p s' intendono comprese altresì quelle sostituzioni per le quali un elemento è sostituito da sè stesso; così nelle due permutazioni

$$a_7 a_2 a_5 a_4 a_3 a_8 a_1 a_6 a_9,$$
$$a_2 a_9 a_3 a_8 a_7 a_4 a_1 a_5 a_6,$$

si ha $p = 3$, poichè la sostituzione per passare dalla prima alla seconda equivale alle tre sostituzioni circolari

$$(a_7 a_2 a_9 a_6 a_5 a_3),\ (a_4 a_8),\ (a_1).$$

In questo caso essendo $m = 9$, si ha $m - p = 6$, quindi le due permutazioni appartengono alla stessa classe.

Combinazioni.

12. *Con m elementi si possono formare*

$$\frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{1.2\dots n}$$

combinazioni della classe n^{esima}.

Indichiamo con m_n il numero delle combinazioni della classe n^{esima} di m elementi e supponiamo formate le combinazioni della classe $(n-1)^{esima}$, il cui numero è m_{n-1}.

Se a ciascuno di questi gruppi aggiungiamo successivamente gli $m-n+1$ elementi rimanenti, verremo a formare tutte le combinazioni della classe n^{esima}, ciascuna però ripetuta n volte. Le verremo a formare tutte poichè ogni combinazione di n elementi si può ottenere aggiungendo uno dei suoi elementi alla combinazione formata cogli altri $n-1$. Ciascuna combinazione è ripetuta n volte; infatti fra le combinazioni di $n-1$ elementi prendiamone due che abbiano differenti due soli elementi, per es.

$$a_1a_2a_3\dots a_{n-2}\,a_p\,,$$
$$a_1a_2a_3\dots a_{n-2}\,a_q\,.$$

Alla prima permutazione aggiungiamo l'elemento a_q e sopprimiamo successivamente ciascuno degli elementi $a_1, a_2, \dots, a_{n-2}$; le $n-2$ combinazioni che avremo formate in tal guisa unite alle due combinazioni date, daranno in tutto n combinazioni di $n-1$ elementi che differiscono fra loro per uno solo degli elementi contenuti nella serie $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-2}, a_p, a_q$. Ora è chiaro che se a ciascuno di questi gruppi aggiungiamo l'elemento che vi manca fra quelli dell'ultima serie, otterremo n combinazioni di n elementi eguali fra di loro, come volevamo provare.

Dunque il numero delle combinazioni della classe n^{esima} di m elementi è uguale all'*ennesima* parte di $(m-n+1)\,m_{n-1}$; cioè si ha

$$m_n = \frac{m-n+1}{n}\,m_{n-1}\,.$$

Se per n sostituiamo successivamente $n-1$, $n-2$, ..., 3, 2,

avremo le formole

$$m_{n-1} = \frac{m-n+2}{n-1} m_{n-2},$$

$$m_{n-2} = \frac{m-n+3}{n-2} m_{n-3},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$m_3 = \frac{m-2}{3} m_2,$$

$$m_2 = \frac{m-1}{2} m_1.$$

Moltiplicando membro a membro tutte l'equazioni precedenti e osservando che $m_1 = m$, troveremo

$$m_n = \frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)}{1.2\dots n}.$$

13. Il valore di m_n può scriversi ancora sotto la forma

$$m_n = \frac{1.2.3\dots m}{1.2\dots n.1.2\dots(m-n)};$$

e poichè il secondo membro non cambia permutando fra loro i numeri n ed $m-n$, si vede che dati m elementi, il numero delle combinazioni della classe n^{esima} è uguale al numero delle combinazioni della classe $(m-n)^{esima}$, cioè che $m_n = m_{m-n}$.

14. Le combinazioni di più elementi possono essere senza ripetizioni o con ripetizioni; cioè in ciascuna combinazione uno stesso elemento può trovarsi una sola volta o può esservi ripetuto $1, 2, \dots n$ volte; il numero m_n che abbiamo trovato è relativo al primo caso; per trovare il numero delle combinazioni con ripetizioni di m elementi della classe n^{esima}, che potremo indicare con $[m_n]$, procederemo in un modo analogo a quello che abbiamo adoperato nel caso precedente. Supporremo già formate le combinazioni con ripetizioni della classe $(n-1)^{esima}$ che sono in numero di $[m_{n-1}]$, e a ciascuno di questi gruppi aggiungeremo successivamente gli m elementi dati e gli $n-1$ elementi in esso contenuti; verremo così a ottenere $(m+n-1)[m_{n-1}]$ combinazioni di n elementi, ciascuna delle quali però sarà ripetuta n volte. Quindi avremo

$$[m_n] = \frac{m+n-1}{n}[m_{n-1}];$$

sostituendo per n successivamente $n-1$, $n-2$, ..., 3, 2, e moltiplicando membro a membro l'equazioni che ne risultano, otterremo

$$[m_n] = \frac{m(m+1)(m+2)\ldots(m+n-1)}{1.2.3\ldots n};$$

e questa formola mostra chiaramente che il numero delle combinazioni con ripetizione di m elementi è uguale al numero delle combinazioni senza ripetizione di $m+n-1$ elementi, cioè che

$$[m_n] = (m+n-1)_n.$$

15. Per m elementi le combinazioni della classe n^{esima} si possono dedurre da quelle della classe $(n-1)^{esima}$ nel seguente modo. Osserviamo in prima che poichè in una combinazione è indifferente in quale ordine sono disposti gli elementi, possiamo supporre che sieno sempre disposti nell'ordine naturale, cioè che gl'indici procedendo dalla sinistra verso la destra formino una serie ascendente. Ciò posto, si farà precedere ciascuna delle combinazioni di $n-1$ elementi successivamente da ciascuno dei rimanenti elementi che hanno un indice minore di quello del primo elemento, se le combinazioni debbono essere senza ripetizioni, o non maggiore, se le combinazioni sono con ripetizione. Così se gli elementi sono a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, formeremo prima le combinazioni della seconda classe

$$a_1a_2,\ a_1a_3,\ a_1a_4,\ a_1a_5,\ a_2a_3,\ a_2a_4,\ a_2a_5,\ a_3a_4,\ a_3a_5,\ a_4a_5;$$

per ottenere quelle della terza classe dovremo far precedere ciascuna delle precedenti dai rimanenti elementi che hanno indice minore di quello del primo; quindi dobbiamo escludere le prime quattro combinazioni, e le altre daranno

$$a_1a_2a_3,\ a_1a_2a_4,\ a_1a_2a_5,\ a_1a_3a_4,\ a_2a_3a_4,$$
$$a_1a_3a_5,\ a_2a_3a_5,\ a_1a_4a_5,\ a_2a_4a_5,\ a_3a_4a_5.$$

Per formare le combinazioni quattro a quattro, dalle precedenti ne dobbiamo escludere sei, e le rimanenti daranno

$$a_1a_2a_3a_4,\ a_1a_2a_3a_5,\ a_1a_2a_4a_5,\ a_1a_3a_4a_5,\ a_2a_3a_4a_5.$$

Se gli elementi sono a_1, a_2, a_3, a_4 e vogliamo formare le

combinazioni con ripetizione, avremo successivamente

$$a_1a_1,\ a_1a_2,\ a_1a_3,\ a_1a_4,\ a_2a_2,\ a_2a_3,\ a_2a_4,\ a_3a_3,\ a_3a_4,\ a_4a_4;$$
$$a_1a_1a_1,\ a_1a_1a_2,\ a_1a_1a_3,\ a_1a_1a_4,\ a_1a_2a_2,\ a_2a_2a_2,\ a_1a_2a_3,\ a_2a_2a_3,\ a_1a_2a_4,$$
$$a_2a_2a_4,\ a_1a_3a_3,\ a_2a_3a_3,\ a_3a_3a_3,\ a_1a_3a_4,\ a_2a_3a_4,\ a_3a_3a_4,$$
$$a_1a_4a_4,\ a_2a_4a_4,\ a_3a_4a_4,\ a_4a_4a_4.$$

Disposizioni.

16. *Con* m *elementi si possono formare*

$$m(m-1)\dots(m-n+1),$$

disposizioni della classe n^{esima}.

Supponiamo di aver formate tutte le combinazioni di m elementi della classe n^{esima} e facciamo subire a ciascuna di queste combinazioni tutte le permutazioni di cui è capace. Dico che a questo modo avremo formate tutte le disposizioni di m elementi della classe n^{esima} e ciascuna una sola volta. Le avremo formate tutte perchè ogni disposizione di m elementi è una combinazione di questi medesimi elementi; nessuna è ripetuta, perchè due disposizioni che provengono da una stessa combinazione differiscono per l'ordine con cui sono disposti i medesimi elementi, e due disposizioni che provengono da due diverse combinazioni differiscono per gli elementi che contengono. Da ciò segue che il numero delle disposizioni di m elementi della classe n^{esima} è uguale al numero delle combinazioni di m elementi della classe n^{esima} moltiplicato pel numero delle permutazioni di n elementi, cioè è uguale a

$$m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1).$$

17. La regola che abbiamo dato per formare le disposizioni senza ripetizione serve altresì per formare quelle con ripetizione, purchè le combinazioni che si adoperano sieno con ripetizione. Con m elementi si possono formare m^n disposizioni con ripetizione della classe n^{esima}. Questo teorema si verifica facilmente per $n=2$, poichè in tal caso il numero delle combinazioni con ripetizione è $\frac{m(m+1)}{2}$; ciascuna combinazione ammette due permutazioni, eccetto quelle che contengono lettere ripetute, le quali ne ammettono una sola; quindi moltiplicando per 2 il numero precedente, otterremo un

risultato che supererà il vero di m; talchè in questo caso il numero delle disposizioni è m^2. Ciò posto basterà provare che se il teorema è vero per la classe $(n-1)^{esima}$ è vero altresì per la classe n^{esima}. Ora supponendo formate le disposizioni con ripetizione della classe $(n-1)^{esima}$, quelle della classe n^{esima} si deducono dalle precedenti facendo precedere successivamente ciascuna di esse da tutti gli m elementi dati; quindi ciascuna disposizione della classe $(n-1)^{esima}$ è ripetuta m volte; talchè se le disposizioni della classe $(n-1)^{esima}$ sono in numero di m^{n-1}, quelle della classe n^{esima} saranno in numero di m^n.

18. In quel che segue supporremo che in ciascuna disposizione gli elementi sieno moltiplicati fra loro. Laonde fra i gruppi di disposizioni saranno eguali tutti quelli che sono formati dai medesimi elementi disposti in ordine diverso. Se facciamo la somma di tutti i gruppi di disposizioni con ripetizione di m elementi della classe n^{esima}, otterremo evidentemente lo stesso risultato che facendo la somma di tutte le combinazioni con ripetizione di m elementi della classe n^{esima} e ripetendo ciascun gruppo tante volte quante sono le permutazioni di cui è capace. Così per tre elementi a_1, a_2, a_3, si ha

$$a_1a_1a_1 + 3a_1a_1a_2 + 3a_1a_1a_3 + 3a_1a_2a_2 + a_2a_2a_2$$
$$+ 6a_1a_2a_3 + 3a_2a_2a_3 + 3a_1a_3a_3 + 3a_2a_3a_3 + a_3a_3a_3 .$$

19. In varie ricerche occorre considerare i soli gruppi nei quali gl' indici hanno una data somma. Se supponiamo che gli elementi sieno a_0, a_1, ... a_m, indicheremo l' insieme de' gruppi nei quali la somma degli indici è r con $D^r_{m,n}$ o più semplicemente con $D_{r,n}$ poichè gli elementi che hanno un indice superiore ad r non possono far parte di nessun gruppo. Laonde il simbolo $D_{r,n}$ rappresenta la somma delle disposizioni con ripetizione degli elementi a_0, a_1, ... a_r presi n ad n e in ciascuna delle quali la somma degl' indici è r.

Conosciute le quantità

$$D_{0,n-1} \ , \quad D_{1,n-1} \ , \quad D_{2,n-1} \ , \quad \ldots\ldots \ , \quad D_{r,n-1} \ ,$$

è facile determinare $D_{r,n}$. Infatti è chiaro che otterremo un gruppo di termini appartenenti a $D_{r,n}$ moltiplicando una delle precedenti quantità, per es., $D_{h,n-1}$ per a_{r-h}; quindi avremo

$$(3) \ D_{r,n} = a_r D_{0,n-1} + a_{r-1} D_{1,n-1} + a_{r-2} D_{2,n-1} + \ldots + a_0 D_{r,n-1} .$$

20. La quantità $D_{r,n}$ si può altresì esprimere per mezzo delle somme di disposizioni della classe n^{esima}, ma nelle quali le somme degli indici di ciascun gruppo sono minori di r. Per trovare una tale relazione, osserviamo che la somma $D_{r,n+1}$ può immaginarsi decomposta in varie somme parziali, nelle quali gli elementi $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_r$ sono ripetuti rispettivamente nella prima $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ volte, nella seconda $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_r$, volte e così di seguito. Indichiamo la prima somma parziale con $D_{r,n+1}(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r)$ e con $C_{r,n+1}(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r)$ la somma delle combinazioni corrispondenti alle disposizioni $D_{r,n+1}$. È chiaro che la prima somma sarà eguale alla seconda ripetuta tante volte quante sono le permutazioni di $n+1$ elementi che ne contengono α_0 eguali fra loro, α_1 eguali fra loro ec., cioè si ha

$$D_{r,n+1}(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_r) = \frac{1.2.3\ldots(n+1)}{\Pi\alpha_0\,\Pi\alpha_1\ldots\Pi\alpha_r} C_{r,n+1}(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_r).$$

In questa formola α_r può essere eguale a 1 o a 0, e $\alpha_0, \alpha_1, \ldots$ possono essere eguali a 0.

Se in tutti i gruppi che compongono $D_{r,n+1}(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_r)$ togliamo una volta sola l'elemento a_1, se vi è contenuto, i nuovi gruppi che otterremo, apparterranno a $D_{r-1,n}(\alpha_0, \alpha_1-1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r)$, e le particolari combinazioni in essa contenute saranno date da $\frac{C_{r,n+1}(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_r)}{a_1}$; quindi avremo

$$D_{r-1,n}(\alpha_0, \alpha_1-1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r) = \frac{1.2\ldots n}{\Pi_0\alpha\,\Pi(\alpha_1-1)\,\Pi\alpha_2\ldots\Pi\alpha_r}\,\frac{C_{r,n+1}(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_r)}{a_1}.$$

Se invece togliamo una volta sola l'elemento a_2, otterremo l'espressione $D_{r-2,n}(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2-1, \ldots, \alpha_r)$, e le combinazioni in essa contenute saranno date da $\frac{C_{r,n+1}(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r)}{a_2}$; talchè

$$D_{r-2,n}(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2-1, \ldots, \alpha_r) = \frac{1.2\ldots n}{\Pi\alpha_0\,\Pi\alpha_1\,\Pi(\alpha_2-1)\ldots\Pi\alpha_r}\,\frac{C_{r,n+1}(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_r)}{a_2},$$

e via discorrendo.

Ciò posto, osserviamo che il valore di $D_{r,\,n+1}(\alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_r)$ può scriversi nel seguente modo

$$D_{r,\,n+1}(\alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_r)$$
$$=\frac{\alpha_1+2\alpha_2+\ldots+r\alpha_r}{r}\,\frac{1.2\ldots(n+1)}{\Pi\alpha_0\,\Pi\alpha_1\ldots\Pi\alpha_r}\,C_{r,\,n+1}(\alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_r)$$
$$=\frac{n+1}{r}\Big[a_1\frac{1.2\ldots n}{\Pi\alpha_0\,\Pi(\alpha_1-1)\ldots\Pi\alpha_r}\,\frac{C_{r,n+1}(\alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_r)}{a_1}$$
$$+2a_2\frac{1.2\ldots n}{\Pi\alpha_0\,\Pi\alpha_1\,\Pi(\alpha_2-1)\ldots\Pi\alpha_r}\,\frac{C_{r,\,n+1}(\alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_r)}{a_2}$$
$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\Big];$$

ovvero, facendo uso delle formole precedenti

$$D_{r,\,n+1}(\alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_r)=\frac{n+1}{r}\,[a_1\,D_{r-1,\,n}(\alpha_0,\alpha_1-1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r)$$
$$+2a_2\,D_{r-2,\,n}(\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2-1,\ldots,\alpha_r)$$
$$+\ldots+ra_r\,D_{0,\,n}(\alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_r-1)].$$

Per gli altri gruppi nei quali abbiamo immaginato decomposta la somma $D_{r,+1}$, avremo formole analoghe alle precedenti; sommandole tutte insieme, troveremo

$$(4)\quad D_{r,\,n+1}=\frac{n+1}{r}\,[a_1\,D_{r-1,\,n}+2a_2\,D_{r-2,\,n}+\ldots+ra_r\,D_{0,\,n}]\cdot$$

Se nella formola (3) sostituiamo $n+1$ per n, avremo

$$D_{r,\,n+1}=a_0\,D_{r,\,n}+a_1\,D_{r-1,\,n}+a_2\,D_{r-2,\,n}+\ldots+a_r\,D_{0,\,n};$$

sottraendo da questa equazione la precedente e ricavando il valore di $D_{r,n}$, otterremo

$$(5)\quad D_{r,\,n}=\frac{1}{ra_0}\,[a_1(n+1-r)\,D_{r-1,\,n}+a_2\,(2\,(n+1)-r)\,D_{r-2,\,n}$$
$$+\ldots+a_r(r(n+1)-r)\,D_{0,\,n}].$$

21. Se l'elemento $a_0=0$, spariscono tutti i termini che contengono a_0, cioè le disposizioni si formano coi soli elementi $a_1,a_2,\ldots,a_r$. In questa ipotesi dalla formola (4) spariranno tutte le D il cui primo indice è minore di n, poichè è impossibile

formare un termine che contenga n fra gli elementi $a_1, a_2, \ldots, a_r$ i cui indici sommati insieme diano per risultato un numero minore di n. Quindi la formola (4) diverrà

$$(6)\ D_{r,n+1} = \frac{n+1}{r}\left[a_1 D_{r-1,n} + 2a_2 D_{r-2,n} + \ldots + (r-n)\, a_{r-n} D_{n,n}\right].$$

ove si suppone $r > n$, perchè altrimenti con $n+1$ elementi presi fra $a_1, a_2, \ldots, a_r$ non si possono formare gruppi nei quali la somma degl'indici è r.

22. Finalmente se indichiamo con D_r la somma di tutti i gruppi di disposizioni ripetute appartenenti a tutte le classi e che hanno r per somma degl'indici, avremo

$$(7)\qquad D_r = a_1 D_{r-1} + a_2 D_{r-2} + \ldots + a_{r-1} D_1 + a_r.$$

Infatti tutti i gruppi che cominciano con a_1 saranno eguali ad a_1 moltiplicato per la somma di tutti i gruppi nei quali la somma degl'indici è $r-1$; parimente i gruppi che cominciano con a_2 saranno eguali ad a_2 moltiplicato per tutti i gruppi nei quali la somma degl'indici è $r-2$, e così di seguito [1]

---

[1] Le formole che abbiamo dato negli ultimi quattro numeri sono conosciute da lungo tempo; vedi fra gli altri Thibaut, *Grundriss der allgemeinen Arithmetik*.

CAPITOLO II.

NUMERI COMPLESSI.

Definizioni.

23. Si chiama *numero complesso* una espressione della forma

$$a + b\sqrt{-1},$$

ove a e b sono quantità reali.

Se facciamo $b = o$ o $a = o$ otterremo nel primo caso il numero reale a e nel secondo il *numero immaginario* $b\sqrt{-1}$; quindi i numeri reali e immaginari sono compresi come casi particolari nei numeri complessi.

Se a e b sono due variabili reali, $a + b\sqrt{-1}$ è una variabile complessa.

24. Due numeri complessi

$$a + b\sqrt{-1}, \quad a - b\sqrt{-1},$$

che differiscono solo pel segno del numero immaginario, si dicono *coniugati*.

L'espressione $a^2 + b^2$ si chiama *norma* del numero complesso $a + b\sqrt{-1}$.

25. Frequentemente, seguendo l'uso comune, ci serviremo della lettera i per indicare il simbolo immaginario $\sqrt{-1}$. Inoltre supporremo che il numero i sia definito dall'equazioni

$$i^{4n} = 1, \quad i^{4n+1} = i, \quad i^{4n+2} = -1, \quad i^{4n+3} = -i,$$

ove n è un numero intero e dall'essere soggetto alle stesse leggi di operazioni delle quantità reali.

Queste semplici convenzioni sono sufficienti per potere applicare ai numeri complessi tutte le regole che abbiamo dimostrate per i numeri reali.

26. Una prima conseguenza che risulta da questa convenzione è, che due numeri complessi coniugati $a + b\sqrt{-1}$ e

$a - b\sqrt{-1}$ si possono sempre considerare come radici dell' equazione di secondo grado

$$(x-a)^2 + b^2 = o;$$

infatti le radici di questa equazione, sono

$$a + \sqrt{-b^2}, \quad a - \sqrt{-b^2},$$

e all'espressione $\sqrt{-b^2}$ potremo per la convenzione fatta sostituire l'espressione equivalente $b\sqrt{-1}$. Da questa osservazione apparisce altresì manifesto che due numeri complessi coniugati hanno una somma e un prodotto reale; il prodotto è per l'appunto la norma.

27. Due numeri complessi $a + b\sqrt{-1}$ e $c + d\sqrt{-1}$, sono eguali tra loro se si ha $a = c$, $b = d$; quindi l'equazione immaginaria

$$a + b\sqrt{-1} = c + d\sqrt{-1},$$

è sempre la rappresentazione simbolica di due equazioni tra quantità reali.

Rappresentazione dei numeri complessi mediante le funzioni circolari.

28 Dati due numeri reali a e b, potremo sempre trovare un numero positivo ρ e un arco reale θ tali che si abbia

$$a = \rho \cos\theta, \quad b = \rho \operatorname{sen}\theta.$$

Infatti da queste due equazioni si ricava

$$\rho = +\sqrt{a^2+b^2}, \quad \cos\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \operatorname{sen}\theta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}};$$

la prima formola determina ρ, le altre due sono soddisfatte da infiniti valori di θ. Se a è un numero positivo, avremo

$$\theta = \pm 2k\pi + \operatorname{arc\,tan}\frac{b}{a},$$

e se a è un numero negativo,

$$\theta = \pm(2k+1)\pi + \operatorname{arc\,tan}\frac{b}{a},$$

ove k indica un numero intero e positivo qualunque.

Laonde il numero complesso $a+bi$ si potrà scrivere sotto le due forme

$$a+bi$$
$$=\rho\left[\cos\left(\pm 2k\pi+\operatorname{arc\,tan}\frac{b}{a}\right)+i\,\operatorname{sen}\left(\pm 2k\pi+\operatorname{arc\,tan}\frac{b}{a}\right)\right];$$
$$a+bi$$
$$=\rho\left[\cos\left(\pm(2k+1)\pi+\operatorname{arc\,tan}\frac{b}{a}\right)+i\,\operatorname{sen}\left(\pm(2k+1)\pi+\operatorname{arc\,tan}\frac{b}{a}\right)\right],$$

delle quali la prima sussiste per tutti i valori positivi, e la seconda per tutti i valori negativi di a.

Il numero ρ dicesi *modulo* e l'angolo θ *argomento* del numero complesso $a+bi$.

29. Un numero complesso determina la posizione di un punto sopra un piano. Infatti è noto che un punto situato sopra un piano è completamente determinato se sono note la sua distanza da un punto fisso detto *polo* e l'angolo che la linea su cui è presa questa distanza fa con una retta condotta pel polo nel piano, e che dicesi *asse polare*. Quindi il numero complesso $\rho(\cos\theta+i\,\operatorname{sen}\theta)$ determina quel punto del piano che dista dal polo per una lunghezza eguale a ρ e che si trova sulla linea che fa coll'asse polare l'angolo θ. Questo punto si chiama *indice del numero complesso*. E chiaro che se le quantità ρ e θ variano in modo continuo, l'indice descriverà sul piano una linea continua.

30. La condizione necessaria e sufficiente, affinchè un numero complesso sia eguale a zero, è che il suo modulo sia zero. La condizione è necessaria, perchè il *coseno* e il *seno* di uno stesso arco non possono annullarsi contemporaneamente; la condizione è sufficiente, perchè se il modulo è uguale a zero, la parte reale e il coefficente di $\sqrt{-1}$ nel numero complesso dato, sono altresì eguali a zero.

31. *La somma di due numeri complessi è un numero complesso che ha per modulo la diagonale del parallelogrammo costruito sulle due rette che rappresentano in grandezza e direzione i moduli dei numeri dati, e per argomento l'angolo che questa diagonale fa coll'asse polare.*

Sieno

$$\rho(\cos\theta+i\,\operatorname{sen}\theta) \quad \text{e} \quad \rho'(\cos\theta'+i\,\operatorname{sen}\theta'),$$

i due numeri dati, R il modulo e φ l'argomento della loro somma.

Si ha

$$R = \sqrt{(\rho \cos\theta + \rho' \cos\theta')^2 + (\rho \,\mathrm{sen}\,\theta + \rho' \,\mathrm{sen}\,\theta')^2}$$
$$= \sqrt{\rho^2 + \rho'^2 + 2\rho\rho' \cos(\theta' - \theta)}\,,$$
$$\tan\varphi = \frac{\rho \,\mathrm{sen}\,\theta + \rho' \,\mathrm{sen}\,\theta'}{\rho \cos\theta + \rho' \cos\theta'}\,.$$

Se in quest' ultima formola poniamo $\frac{\mathrm{sen}\,\varphi}{\cos\varphi}$ invece di $\tan\varphi$, togliamo i denominatori e ricaviamo il valore di $\frac{\rho}{\rho'}$, troveremo facilmente

$$\frac{\rho}{\rho'} = \frac{\mathrm{sen}\,(\theta' - \varphi)}{\mathrm{sen}\,(\varphi - \varphi')}\,.$$

Questa formola e il valore di R dimostrano completamente il teorema.

32. Se osserviamo che la differenza dei due numeri complessi

$$\rho\,(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta) \quad \text{e} \quad \rho'\,(\cos\theta' + i\,\mathrm{sen}\,\theta'),$$

equivale alla somma dei numeri

$$\rho\,(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta) \quad \text{e} \quad \rho'(\cos(\theta' + \pi) + i\,\mathrm{sen}\,(\theta' + \pi))\,,$$

si vede chiaramente che per trovare il modulo e l' argomento della differenza di due numeri complessi, bisogna costruire il parallelogrammo sopra la retta che rappresenta in grandezza e direzione il modulo del sottraendo e sulla retta che rappresenta in grandezza il modulo del sottrattore, ma ha una direzione opposta.

33. Dai teoremi dimostrati nei due numeri precedenti risulta che *il modulo della somma o della differenza di due numeri complessi è compreso fra la somma e la differenza dei moduli di questi numeri.*

34. In generale si ha che *il modulo della somma di più numeri complessi è minore della somma dei moduli.*

Infatti se indichiamo con R il modulo della somma

$$\rho_1\,(\cos\theta_1 + i\,\mathrm{sen}\,\theta_1) + \rho_2\,(\cos\theta_2 + i\,\mathrm{sen}\,\theta_2)$$
$$+ \ldots + \rho_m\,(\cos\theta_m + i\,\mathrm{sen}\,\theta_m),$$

avremo

$$
\begin{aligned}
R^2 &= (\rho_1 \cos\theta_1 + \rho_2 \cos\theta_2 + \ldots + \rho_m \cos\theta_m)^2 \\
&+ (\rho_1 \operatorname{sen}\theta_1 + \rho_2 \operatorname{sen}\theta_2 + \ldots + \rho_m \operatorname{sen}\theta_m)^2 \\
&= \rho_1^2 + \rho_2^2 + \ldots \rho_m^2 \\
&+ 2\rho_1\rho_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \\
&+ \ldots\ldots\ldots \\
&+ 2\rho_{m-1}\rho_m \cos(\theta_{m-1} - \theta_m) \\
&< \rho_1^2 + \rho_2^2 + \ldots + \rho_m^2 + 2\rho_1\rho_2 + \ldots + 2\rho_{m-1}\rho_m,
\end{aligned}
$$

e per conseguenza

$$R < \rho_1 + \rho_2 + \ldots + \rho_m.$$

35. *Il prodotto di due numeri complessi è un numero complesso che ha per modulo il prodotto dei moduli e per argomento la somma degli argomenti dei fattori.*

Infatti si ha

$$
\begin{aligned}
&\rho(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta) \times \rho'(\cos\theta' + i \operatorname{sen}\theta') \\
&= \rho\rho'[\cos\theta\cos\theta' - \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\theta' + i(\operatorname{sen}\theta\cos\theta' + \cos\theta \operatorname{sen}\theta')] \\
&= \rho\rho'[\cos(\theta + \theta') + i \operatorname{sen}(\theta + \theta')]
\end{aligned}
$$

Parimente si troverebbe

$$
\begin{aligned}
&\rho_1(\cos\theta_1 + i \operatorname{sen}\theta_1) \times \rho_2(\cos\theta_2 + i \operatorname{sen}\theta_2) \\
&\times \ldots \times \rho_m(\cos\theta_m + i \operatorname{sen}\theta_m) \\
&= \rho_1\rho_2 \ldots \rho_m[\cos(\theta_1 + \theta_2 + \ldots + \theta_m) + i \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2 + \ldots + \theta_m)].
\end{aligned}
$$

36. *Il prodotto di più numeri complessi non cambia di valore in qualunque ordine si moltiplicano i suoi fattori.*

Questo teorema è conseguenza evidente dell'ultima formola del numero precedente. Infatti il prodotto dei numeri complessi dati si compone del prodotto dei moduli e dell'espressione

$$\cos(\theta_1 + \theta_2 + \ldots + \theta_m) + i \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2 + \ldots + \theta_m),$$

la quale evidentemente non muta valore cambiando l'ordine delle θ. Ma il teorema sussiste pel prodotto $\rho_1\rho_2 \ldots \rho_m$ formato di fattori reali, dunque sussiste anche in generale per fattori complessi.

37. *Affinchè un prodotto di più numeri complessi sia eguale a zero è necessario che sia zero uno dei fattori.*

Infatti nell'espressione

$$\rho_1\rho_2 \ldots \rho_m[\cos(\theta_1 + \theta_2 + \ldots + \theta_m) + i \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2 + \ldots + \theta_m)],$$

la quantità fra parentesi non può essere zero; quindi affinchè il prodotto dei numeri complessi dati sia zero, è necessario che sia tale il prodotto di fattori reali.

$$\rho_1 \rho_2 \ldots \rho_m ;$$

cioè è necessario che una delle quantità ρ sia zero; lo che prova il teorema.

38. *Il quoziente di due numeri complessi è un numero complesso che ha per modulo e per argomento rispettivamente il quoziente dei moduli e la differenza degli argomenti del dividendo e del divisore.*

Se infatti moltiplichiamo i due termini della frazione

$$\frac{\rho (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)}{\rho' (\cos \theta' + i \operatorname{sen} \theta')}$$

per $\frac{1}{\rho'} (\cos \theta' - i \operatorname{sen} \theta')$, troveremo

$$\frac{\rho (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)}{\rho' (\cos \theta' + i \operatorname{sen} \theta')} = \frac{\rho}{\rho'} [\cos (\theta - \theta') + i \operatorname{sen} (\theta - \theta')] .$$

Se in questa espressione facciamo $\theta = 0$, $\rho = 1$, avremo

$$\frac{1}{\rho' (\cos \theta' + i \operatorname{sen} \theta')} = \frac{1}{\rho'} (\cos \theta' - i \operatorname{sen} \theta') .$$

39. *La potenza intera di un numero complesso, è un numero complesso che ha per modulo la potenza corrispondente del modulo e per argomento il prodotto dell'argomento del numero dato pel grado della potenza.*

Infatti se nella formola generale del n° 35 facciamo $\rho_1 = \rho_2 = \ldots = \rho_m = \rho$, $\theta_1 = \theta_2 = \ldots = \theta_m = \theta$, avremo

$$[\rho (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)]^m = \rho^m (\cos m \theta + i \operatorname{sen} m \theta).$$

Questa formola è conosciuta sotto il nome di formola di Moivre.

40. Proponiamoci ora di cercare la potenza frazionaria di un numero complesso. Siano m ed n due numeri interi e positivi primi fra loro e facciamo

$$[\rho (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)]^{\frac{m}{n}} = r (\cos \omega + i \operatorname{sen} \omega) ;$$

si tratta di trovare i valori di r e di ω

Innalzando i due membri alla potenza n^{esima}, si trova

$$\rho^m (\cos m\theta + i \,\mathrm{sen}\, m\theta) = r^n (\cos n\omega + i \,\mathrm{sen}\, n\omega),$$

da cui

$$\rho^m \cos m\theta = r^n \cos n\omega, \quad \rho^m \,\mathrm{sen}\, m\theta = r^n \,\mathrm{sen}\, n\omega;$$

sommando i quadrati di queste equazioni otterremo

$$\rho^{2m} = r^{2n}, \quad \text{ovvero} \quad r = \rho^{\frac{m}{n}};$$

e l'equazioni precedenti diventano

$$\cos m\theta = \cos n\omega, \quad \mathrm{sen}\, m\theta = \mathrm{sen}\, n\omega.$$

Affinchè queste due formole possano coesistere, è necessario che gli archi $m\theta$ e $n\omega$ differiscano per un multiplo della circonferenza, cioè che si abbia

$$n\omega = m\theta + 2k\pi,$$

ove k indica un numero intero qualunque positivo o negativo; laonde avremo

$$(1) \quad [\rho(\cos\theta + i \,\mathrm{sen}\,\theta)]^{\frac{m}{n}} = \rho^{\frac{m}{n}}\left[\cos\frac{m\theta + 2k\pi}{n} + i \,\mathrm{sen}\,\frac{m\theta + 2k\pi}{n}\right]$$

Ora osserviamo che per tutti i valori di k che differiscono per un multiplo di n il *coseno* e il *seno* contenuti nel secondo membro hanno lo stesso valore; poichè facendo k una volta eguale al numero positivo $h < n$ e un'altra volta a $h + h'n$, i due archi

$$\frac{m\theta + 2h\pi}{n} \quad \text{e} \quad \frac{m\theta + 2h\pi}{n} + 2h'\pi,$$

hanno lo stesso *seno* e lo stesso *coseno*. Della stessa proprietà godono i due archi

$$\frac{m\theta - 2h\pi}{n} \quad \text{e} \quad \frac{m\theta - 2h\pi}{n} + 2\pi;$$

quindi il secondo membro dell'ultima equazione e per conseguenza l'espressione

$$[\rho(\cos\theta + i \,\mathrm{sen}\,\theta)]^{\frac{m}{n}},$$

ha n valori differenti che corrispondono ai valori $0, 1, 2, \ldots, (n-1)$ di k.

41. Nella formola (1) poniamo $k = hm$, avremo

$$[\rho (\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)]^{\frac{m}{n}} = \rho^{\frac{m}{n}} \left[\cos \frac{m}{n}(\theta + 2h\pi) + i \operatorname{sen} \frac{m}{n}(\theta + 2h\pi)\right].$$

Sia μ un numero irrazionale positivo al quale converga la frazione $\frac{m}{n}$ facendo crescere m ed n indefinitamente; in questa ipotesi, dall' ultima formola si deduce

$$[\rho (\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)]^{\mu} = \rho^{\mu} [\cos \mu (\theta + 2h\pi) + i \operatorname{sen} \mu (\theta + 2h\pi)],$$

ove h è un numero arbitrario, in guisa che il secondo membro ha infiniti valori.

42. Finalmente se $m = -m'$, per definizione si ha

$$[\rho (\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)]^{-m'}$$

$$= \frac{1}{[\rho (\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)]^{m'}} = \frac{1}{\rho^{m'} (\cos m'\theta + i \operatorname{sen} m'\theta)},$$

ovvero

$$[\rho \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)]^{-m'} = \rho^{-m'} (\cos m'\theta - i \operatorname{sen} m'\theta).$$

43. Se nella formola (1) facciamo $m = 1$, $\rho = 1$, $\theta = 0$, troveremo

$$(2) \qquad (1)^{\frac{1}{n}} = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \operatorname{sen} \frac{2k\pi}{n},$$

talchè l' equazione (1) potrà scriversi sotto la forma

$$[\rho (\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)]^{\frac{m}{n}} = \rho^{\frac{m}{n}} \left(\cos \frac{m\theta}{n} + i \operatorname{sen} \frac{m\theta}{n}\right) (1)^{\frac{1}{n}}.$$

Se innalziamo i due membri dell' equazione (2) alla potenza m^{esima}, avremo

$$(1)^{\frac{m}{n}} = \cos \frac{2km\pi}{n} + i \operatorname{sen} \frac{2km\pi}{n};$$

ora il secondo membro è una espressione che innalzata alla potenza n^{esima} dà per risultato 1, e che ha n valori differenti, quindi deve aversi

$$(1)^{\frac{1}{n}} = (1)^{\frac{m}{n}},$$

lo che esprime che uno dei valori del primo membro è uguale a uno dei valori del secondo. Laonde si ha

$$[\rho (\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)]^{\frac{m}{n}} = \rho^{\frac{m}{n}} \left(\cos \frac{m\theta}{n} + i \operatorname{sen} \frac{m\theta}{n}\right) (1)^{\frac{m}{n}}.$$

44. Ritenendo la denominazione del n° 28, e facendo $\varphi = arc\ tan\ \frac{b}{a}$, sappiamo che il più piccolo valore che può prendere θ è φ o $\varphi + \pi$ secondochè a è un numero positivo o negativo; quindi avremo per a positivo

$$(a+bi)^{\frac{m}{n}} = \rho^{\frac{m}{n}}\left(cos \frac{m\varphi}{n} + i\, sen\, \frac{m\varphi}{n}\right)(1)^{\frac{m}{n}},$$

e per a negativo

$$(a+bi)^{\frac{m}{n}} = \rho^{\frac{m}{n}}\left(cos\, \frac{m\varphi}{n} + i\, sen\, \frac{m\varphi}{n}\right)\left(cos\, \frac{m\pi}{n} + i\, sen\, \frac{m\pi}{n}\right)(1)^{\frac{m}{n}}.$$

Se in quest' ultima formola poniamo $a = -1$, $b = 0$, troveremo

$$(-1)^{\frac{m}{n}} = \left(cos\, \frac{m\pi}{n} + i\, sen\, \frac{m\pi}{n}\right)(1)^{\frac{m}{n}};$$

in guisa che per a negativo si ha

$$(a+bi)^{\frac{m}{n}} = \rho^{\frac{m}{n}}\left(cos\, \frac{m\varphi}{n} + i\, sen\, \frac{m\varphi}{n}\right)(-1)^{\frac{m}{n}}.$$

45. Esaminiamo ora se il teorema espresso dalla formola

$$x^{\mu}\, y^{\mu} = (xy)^{\mu},$$

sussiste per valori complessi di x e di y. Supponiamo che si abbia

$$x = \rho\,(cos\, \theta + i\, sen\, \theta), \quad y = r\,(cos\, \omega + i\, sen\, \omega), \quad \mu = \frac{m}{n};$$

avremo

$$\begin{aligned} x^{\frac{m}{n}}\, y^{\frac{m}{n}} &= \rho^{\frac{m}{n}}\left(cos\, \frac{m\theta + 2k\pi}{n} + i\, sen\, \frac{m\omega + 2k\pi}{n}\right). \\ & \quad r^{\frac{m}{n}}\left(cos\, \frac{m\omega + 2k'\pi}{n} + i\, sen\, \frac{m\omega + 2k'\pi}{n}\right) \\ &= (\rho r)^{\frac{m}{n}}\left[cos\, \frac{m\,(\theta+\omega) + 2h\pi}{n} + i\, sen\, \frac{m\,(\theta+\omega) + 2h\pi}{n}\right] \\ &= \left[\rho r\left(cos\,(\theta+\omega) + i\, sen\,(\theta+\omega)\right)\right]^{\frac{m}{n}} = (xy)^{\frac{m}{n}}, \end{aligned}$$

avendo fatto $h = k + k'$.

Quindi possiamo dire che se si moltiplica un valore di $x^{\frac{m}{n}}$ per un valore di $y^{\frac{m}{n}}$, si otterrà per risultato un valore di $(xy)^{\frac{m}{n}}$. Sotto

questo punto di vista si vede che l'equazione proposta ha luogo per qualunque valore reale di μ.

Funzioni di una variabile complessa.

46. Per i teoremi precedenti ogni funzione $f(z)$ algebrica, o che si ottiene mediante un numero indefinito di operazioni algebriche, ponendo $z = x + y\,i$, prenderà la forma

$$\varphi(x, y) + i\,\psi(x, y),$$

ove $\varphi(x, y)$ e $\psi(x, y)$ sono funzioni reali di x e di y. Queste funzioni, che si distinguono col nome di funzioni di una variabile complessa, sono di grande importanza, poichè nello studio delle funzioni invece di far prendere alla variabile tutti i valori reali da $-\infty$ a $+\infty$ conviene di farle prendere tutti i valori complessi, facendo percorrere all' indice della variabile tutto il piano.

Applicazioni delle formole precedenti.

I numeri complessi sono di una grande importanza nell' analisi matematica, come apparirà manifesto in seguito. Tuttavia è utile dare fin d'ora qualche applicazione dei principii sviluppati nei numeri precedenti.

47. *Il prodotto di due somme di due quadrati è altresì una somma di due quadrati.*

Il prodotto

$$(a + b\sqrt{-1})(a - b\sqrt{-1})(c + d\sqrt{-1})(c - d\sqrt{-1});$$

è eguale a

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2),$$

moltiplicando fra loro i fattori coniugati.

Inoltre si ha

$$(a + b\sqrt{-1})(c + d\sqrt{-1}) = (ac - bd) + (ad + bc)\sqrt{-1},$$
$$(a - b\sqrt{-1})(c - d\sqrt{-1}) = (ac - bd) - (ad + bc)\sqrt{-1};$$

quindi lo stesso prodotto è uguale anche a

$$(ac - bd)^2 + (ad + bc)^2 .$$

Laonde avremo

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac-bd)^2+(ad+bc)^2;$$

lo che prova il teorema.

Moltiplicando fra loro i due fattori estremi e i due medi, si trova

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac+bd)^2+(bc-ad)^2;$$

dal che risulta che la decomposizione di $(a^2+b^2)(c^2+d^2)$ nella somma di due quadrati può effettuarsi in due modi diversi,

Sostituendo $b\sqrt{n}$ invece di b e $d\sqrt{n}$ invece di d, otterremo

$$(a^2+nb^2)(c^2+nd^2)=(ac\mp nbd)^2+n(ad\pm bc)^2,$$

quindi il prodotto di due numeri della forma a^2+nb^2 è un numero della stessa forma.

Dal teorema precedente segue che il prodotto di più numeri formati ciascuno dall'addizione di due quadrati è la somma di due quadrati.

48. *Il prodotto di due somme di quattro quadrati è altresì la somma di quattro quadrati.*

Si ha identicamente

$$\begin{aligned}(\alpha\delta-\beta\gamma)(\alpha'\delta'-\beta'\gamma')&=(\alpha\alpha'+\gamma\gamma')(\beta\beta'+\delta\delta')\\&\quad-(\alpha\beta'+\gamma\delta')(\beta\alpha'+\delta\gamma'),\end{aligned}$$

ove α, β, α', β', γ, γ', δ, δ', sono numeri qualunque. Poniamo

$$\begin{aligned}\alpha&=a+b\sqrt{-1}\,, & \alpha'&=a'+b'\sqrt{-1}\,,\\ \beta&=c+d\sqrt{-1}\,, & \beta'&=c'+d'\sqrt{-1}\,,\\ \gamma&=-(c-d\sqrt{-1}), & \gamma'&=-(c'-d'\sqrt{-1}),\\ \delta&=a-b\sqrt{-1}\,, & \delta'&=a'-b'\sqrt{-1}\,,\end{aligned}$$

e sostituendo questi valori nell'identità precedente, troveremo

$$\begin{aligned}(a^2+b^2+c^2+d^2)&(a'^2+b'^2+c'^2+d'^2)\\&=(aa'-bb'+cc'-dd')^2\\&+(ab'+ba'-cd'-c'd)^2\\&+(ac'-bd'-ca'+db')^2\\&+(ad'+bc'+cb'+da')^2;\end{aligned}$$

lo che prova il teorema.

Da ciò segue che il prodotto di più somme di quattro quadrati è altresì una somma di quattro quadrati. [1]

49. Proponiamoci di trovare il valore dell'espressione [2]

$$S = \sum_{h=0}^{h=n-1} a^{h+1} \left[\cos(x+hy) + i \operatorname{sen}(x+hy)\right].$$

Per un teorema precedente (35), si ha

$$S = a(\cos x + i \operatorname{sen} x) \sum_{h=0}^{h=n-1} a^h (\cos hy + i \operatorname{sen} hy);$$

ma

$$1 + z + z^2 + \ldots + z^{n-1} = \frac{1-z^n}{1-z},$$

ovvero sostituendo per z il numero complesso $a(\cos y + i \operatorname{sen} y)$,

$$\sum_{h=0}^{h=n-1} a^h (\cos hy + i \operatorname{sen} hy) = \frac{1 - a^n(\cos ny + i \operatorname{sen} ny)}{1 - a(\cos y + i \operatorname{sen} y)},$$

quindi

$$S = a(\cos x + i \operatorname{sen} x) \frac{1 - a^n(\cos ny + i \operatorname{sen} ny)}{1 - a(\cos y + i \operatorname{sen} y)}$$

$$= \frac{a \cos x - a^{n+1}\cos(x+ny) + i\left[a \operatorname{sen} x - a^{n+1} \operatorname{sen}(x+ny)\right]}{1 - a(\cos y + i \operatorname{sen} y)}.$$

Moltiplicando numeratore e denominatore dell'ultima frazione per $1 - a\cos y + i a \operatorname{sen} y$, otterremo

$$S = \frac{(1 - a\cos y)\left[a\cos x - a^{n+1}\cos(x+ny)\right] - a \operatorname{sen} y \left[a \operatorname{sen} x - a^{n+1}\operatorname{sen}(x+ny)\right]}{1 - 2a\cos y + a^2}$$

$$+ i\,\frac{a \operatorname{sen} y\left[a\cos x - a^{n+1}\cos(x+ny)\right] + (1 - a\cos y)\left[a \operatorname{sen} x - a^{n+1}\operatorname{sen}(x+ny)\right]}{1 - 2a\cos y + a^2}$$

Da questa equazione se ne possono dedurre altre che ci saranno

---

[1] Per varie conseguenze interessanti che si possono dedurre dall'ultima formola, dovuta ad Eulero, vedi Le Besgue, *Exercices d'Analyse numérique*, pag. 104 e segg.

[2] Il simbolo Σ posto innanzi ad una funzione indica una somma; così l'espressione $\sum_{n=0}^{n=a} f(n)$ è uguale alla somma

$$f(0) + f(1) + f(2) + \ldots + f(a-1) + f(a).$$

utili in seguito; infatti eguagliando fra loro le quantità reali e i coefficienti di i, avremo

$$\sum_{h=0}^{h=n-1} a^h \cos(x+hy)$$

$$= \frac{\cos x - a\cos(x-y) - a^n \cos(x+ny) + a^{n+1}\cos(x+(n-1)y)}{1-2a\cos y + a^2}.$$

$$\sum_{h=0}^{h=n-1} a^h \operatorname{sen}(x+hy)$$

$$= \frac{\operatorname{sen} x - a\operatorname{sen}(x-y) - a^n \operatorname{sen}(x+ny) + a^{n+1}\operatorname{sen}(x+(n-1)y)}{1-2a\cos y + a^2}.$$

Se facciamo $a=1$ troveremo

$$\cos x + \cos(x+y) + \cos(x+2y) + \ldots + \cos(x+(n-1)y)$$

$$= \frac{\cos x - \cos(x+ny) - \cos(x-y) + \cos(x+(n-1)y)}{2(1-\cos y)},$$

$$\operatorname{sen} x + \operatorname{sen}(x+y) + \operatorname{sen}(x+2y) + \ldots + \operatorname{sen}(x+(n-1)y)$$

$$= \frac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen}(x-y) - \operatorname{sen}(x+ny) + \operatorname{sen}(x+(n-1)y)}{2(1-\cos y)}.$$

Ora dalla Trigonometria si hanno le formole

$$(\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}y)^2 = \frac{1-\cos y}{2},$$

$$\cos(a-b) - \cos(a+b) = 2\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b,$$

$$\operatorname{sen}(a+b) - \operatorname{sen}(a-b) = 2\cos a \operatorname{sen} b;$$

quindi avremo

$$\cos(x+(n-1)y) - \cos(x+ny) = 2\operatorname{sen}[x+(n-\tfrac{1}{2})y]\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}y,$$

$$\cos(x-y) - \cos x = 2\operatorname{sen}(x-\tfrac{1}{2}y)\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}y,$$

$$\operatorname{sen}(x+ny) - \operatorname{sen}(x+(n-1)y) = 2\cos(x+(n-\tfrac{1}{2})y)\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}y,$$

$$\operatorname{sen} x - \operatorname{sen}(x-y) = 2\cos(x-\tfrac{1}{2}y)\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}y;$$

e per conseguenza

$$\cos x + \cos(x+y) + \cos(x+2y) + \ldots + \cos(x+(n-1)y)$$

$$= \frac{\operatorname{sen}[x+(n-\tfrac{1}{2})y] - \operatorname{sen}(x-\tfrac{1}{2}y)}{2\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}y},$$

$$\operatorname{sen} x + \operatorname{sen}(x+y) + \operatorname{sen}(x+2y) + \ldots + \operatorname{sen}(x+(n-1)y)$$

$$= \frac{\cos(x-\tfrac{1}{2}y) - \cos[x+(n-\tfrac{1}{2})y]}{2\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}y}.$$

Ma

$$sen\,[x+(n-\tfrac{1}{2})\,y]-sen\,(x-\tfrac{1}{2}\,y)=2\cos\left(x+\frac{n-1}{2}\,y\right)sen\,\frac{n}{2}\,y,$$

$$\cos\,(x-\tfrac{1}{2}y)-\cos\,[x+(n-\tfrac{1}{2})\,y]=2\,sen\left(x+\frac{n-1}{2}\,y\right)sen\,\frac{n}{2}\,y;$$

talchè le formole precedenti diventano

$$\cos x+\cos\,(x+y)+\cos\,(x+2y)+\ldots\ldots+\cos\,(x+(n-1)\,y)$$

$$=\frac{\cos\left(x+\dfrac{n-1}{2}\,y\right)sen\,\dfrac{n}{2}\,y}{sen\,\tfrac{1}{2}\,y}\,.$$

$$sen\,x+sen\,(x+y)+sen\,(x+2y)+\ldots\ldots+sen\,(x+(n-1)\,y)$$

$$=\frac{sen\left(x+\dfrac{n-1}{2}\,y\right)sen\,\dfrac{n}{2}\,y}{sen\,\tfrac{1}{2}\,y}\,.$$

50. Nel n° 43 abbiamo veduto che tutti i valori di $(1)^{\frac{1}{n}}$ sono dati dalla formola

$$\cos\frac{2k\pi}{n}+i\,sen\,\frac{2k\pi}{n},$$

ove k può ricevere i valori $0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n-1$.

Se n è un numero pari, i valori $k=0$ e $k=\frac{n}{2}$ danno due radici reali, e gli altri valori

$$\binom{1}{n-1},\quad\binom{2}{n-2},\quad\binom{3}{n-3}\ldots\ldots,\binom{\frac{1}{2}n-1}{\frac{1}{2}n+1},$$

danno $n-2$ radici complesse coniugate due a due. Quindi per n pari, l'espressione $(1)^{\frac{1}{n}}$ ammette le due radici reali

$$+1 \quad \text{e} \quad -1$$

e le $n-2$ radici complesse

$$\cos\frac{2\pi}{n}\pm i\,sen\,\frac{2\pi}{n},$$

$$\cos\frac{4\pi}{n}\pm i\,sen\,\frac{4\pi}{n},$$

$$\cos\frac{6\pi}{n}\pm i\,sen\,\frac{6\pi}{n},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cos\frac{(n-2)\pi}{n}\pm i\,sen\,\frac{(n-2)\pi}{n}.$$

Se n è un numero dispari, l'espressione $(1)^{\frac{1}{n}}$ ammette una sola radice reale

$$+1,$$

corrispondente al valore $k=0$, e $n-1$ radici complesse coniugate due a due corrispondenti ai valori di k

$$\binom{1}{n-1}, \quad \binom{2}{n-1}, \quad \ldots\ldots, \quad \binom{\frac{1}{2}n-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}},$$

che sono

$$\cos\frac{2\pi}{n} \pm i\, sen\frac{2\pi}{n},$$

$$\cos\frac{4\pi}{n} \pm i\, sen\frac{4\pi}{n},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\cos\frac{(n-1)\pi}{n} \pm i\, sen\frac{(n-1)\pi}{n}.$$

Così per es.: l'espressione $(1)^{\frac{1}{4}}$ avrà due radici reali $+1$ e -1 e due radici complesse $\cos\frac{\pi}{2} \pm i\, sen\frac{\pi}{2} = \pm i.$

L'espressione $(1)^{\frac{1}{3}}$ ammette una sola radice reale $+1$ e due radici complesse coniugate

$$\frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}, \quad \text{poichè} \quad \cos\frac{2\pi}{3} = -\tfrac{1}{2}.$$

Parimente, $(1)^{\frac{1}{5}}$ ha una radice reale $+1$ e quattro radici complesse

$$\frac{\sqrt{5}-1 \pm i\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4},$$

$$\frac{-(\sqrt{5}+1) \pm i\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4},$$

poichè $\cos\frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$.

51. I valori dell' espressione $(-1)^{\frac{1}{n}}$ si deducono dalla formola

$$\cos\frac{(2k+1)\pi}{n}+i\,\mathrm{sen}\frac{(2k+1)\pi}{n},$$

dando a k i valori $0, 1, 2, 3, \ldots, n-1$.

Se n è un numero pari, le radici di $(-1)^{\frac{1}{n}}$ saranno tutte numeri complessi coniugati due a due che corrispondono ai valori di k

$$\binom{0}{n-1},\quad \binom{1}{n-2},\quad \binom{2}{n-3}\ldots,\binom{\frac{1}{2}n-1}{\frac{1}{2}n},$$

e sono date dall' espressioni

$$\cos\frac{\pi}{n}\pm i\,\mathrm{sen}\frac{\pi}{n},$$

$$\cos\frac{3\pi}{n}\pm i\,\mathrm{sen}\frac{3\pi}{n},$$

$$\cos\frac{5\pi}{n}\pm i\,\mathrm{sen}\frac{5\pi}{n},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\cos\frac{(n-1)\pi}{n}\pm i\,\mathrm{sen}\frac{(n-1)\pi}{n}.$$

Se n è un numero dispari, $(-1)^{\frac{1}{n}}$ ha una sola radice reale

$$-1,$$

corrispondente a $k=\frac{n-1}{2}$, e $n-1$ radici complesse che si riferiscono ai valori di k

$$\binom{0}{n-1},\quad \binom{1}{n-2},\quad \binom{2}{n-3}\ldots,\begin{pmatrix}\frac{n-3}{2}\\ \frac{n+1}{2}\end{pmatrix},$$

e sono date dalle formole

$$\cos\frac{\pi}{n}\pm i\,\mathrm{sen}\frac{\pi}{n},$$

$$\cos\frac{3\pi}{n}\pm i\,\mathrm{sen}\frac{3\pi}{n},$$

$$\cos\frac{5\pi}{n} \pm i \operatorname{sen}\frac{5\pi}{n},$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

$$\cos\frac{(n-2)\pi}{n} \pm i \operatorname{sen}\frac{(n-2)\pi}{n}.$$

Per es.: le radici di $(-1)^{\frac{1}{4}}$ sono

$$\cos\frac{\pi}{4} \pm i \operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} \pm i\frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\cos\frac{3\pi}{4} \pm i \operatorname{sen}\frac{3\pi}{4} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \pm i\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

e le radici di $(-1)^{\frac{1}{3}}$ sono

$$-1,\ \cos\frac{\pi}{3} \pm i \operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = \tfrac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

CAPITOLO III.

LIMITI E CONTINUITÀ DELLE FUNZIONI.

Limite delle funzioni.

52. Data una funzione $y=f(x)$ di una variabile x, è noto che variando x, varia in modo analogo la funzione y; ora giova distinguere tre casi in questa simultanea variazione della variabile e della funzione.

1°. Se col crescere o decrescere indefinitamente di x la funzione y si avvicina sempre ad una certa quantità determinata l senza poterla però mai raggiungere esattamente, si dice che l è il *limite* di y e si scrive

$$lim\ y=l$$

Così dimostreremo in seguito che la funzione $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ al crescere di m si avvicina continuamente ad una quantità determinata e compresa fra 2 e 3, senza mai divenirle perfettamente eguale; quindi potremo scrivere

$$lim\left(1+\frac{1}{m}\right)^m=e,\ \text{per}\ \ m=\infty\ .$$

2°. Può accadere che mentre x si avvicina a un dato valore a, la funzione y vada continuamente crescendo in modo da poter divenire maggiore di qualunque quantità data; allora per brevità di linguaggio si dice che y ha per limite l'infinito e si scrive

$$lim\ y=+\infty\ ,\ \ \text{per}\ \ x=a.$$

Dalla Trigonometria è noto che la tangente di un arco è una quantità determinata per tutti i valori dell'arco compresi fra 0 e $\frac{\pi}{2}$ e che facendo crescere l'arco a cominciare da zero, la tangente cresce continuamente in modo da poter divenire maggiore

di qualunque quantità data; quindi si scriverà

$$lim\ tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=+\infty\ ,\quad \text{per}\quad x=0.$$

3°. Se però mentre x si avvicina indefinitamente ad a la funzione può prendere valori negativi maggiori di qualunque quantità data in valore assoluto, si dice che la funzione ha per limite l'infinito negativo e si scrive

$$lim\ y=-\infty\ ,\quad \text{per}\quad x=a.$$

Così per es.: $tan\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$ è una funzione che è eguale a zero

per $x=\frac{\pi}{2}$ ed è negativa e in valor numerico crescente al di là di ogni limite quando si fa convergere x verso zero; quindi potremo scrivere

$$lim\ tan\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\infty\ ,\quad \text{per}\quad x=0.$$

53. Limite di una funzione

$$P+Q\sqrt{-1},$$

di una variabile complessa si dice un'altra funzione

$$L_1+L_2\sqrt{-1},$$

tale che si abbia

$$L_1=lim\ P\ ,\quad L_2=lim\ Q.$$

54. L'idea di limite è così inerente alla natura stessa della scienza delle grandezze, che s'incontra fin dal primi passi che si fanno nello studio delle matematiche. Così nell'Aritmetica elementare quando si vuol far vedere in che consista il valore di una frazione decimale periodica, è indispensabile ricorrere all'idea di limite; e infatti si dimostra che se in una frazione decimale periodica si considera un numero sempre maggiore di periodi, la frazione decimale tende continuamente verso una frazione ordinaria che (nel caso di una frazione periodica semplice) ha per numeratore il periodo e per denominatore un numero espresso da tanti 9

quante sono le cifre del periodo. Talchè la frazione ordinaria, che chiamasi *frazione generatrice*, è propriamente il limite della frazione periodica. In generale per formarsi un concetto chiaro del valore di qualunque quantità incommensurabile, bisogna considerarla come il limite di una quantità commensurabile. Infatti nell'Aritmetica si è veduto che dato un numero incommensurabile A si possono sempre trovare due numeri commensurabili $\frac{x}{n}$ e $\frac{x+1}{n}$ fra i quali A è compreso; se facciamo crescere n, i limiti fra i quali è compresa A si restringono sempre più; lo che equivale a dire che la quantità incommensurabile A è il limite al quale convergono i numeri commensurabili $\frac{x}{n}$ e $\frac{x+1}{n}$ al crescere di n.

Parimente nella Geometria elementare, quando si vuol passare dall'idea chiarissima e determinata delle figure rettilinee a quella delle figure curvilinee, torna utilissimo ricorrere alla teoria dei limiti. Così la superficie di un cerchio può considerarsi come il limite delle superficie dei poligoni iscritti, il cui numero di lati va continuamente aumentando, e la circonferenza del cerchio come il limite dei perimetri dei medesimi poligoni. In generale la lunghezza di una curva comunque tracciata nello spazio può sempre riguardarsi come il limite dei perimetri dei poligoni iscritti il cui numero di lati cresce continuamente.

La teoria dei limiti ha numerose applicazioni in questa prima parte del nostro Trattato; giova quindi esporre i teoremi fondamentali che ne formano la base.

55. *Il limite della somma algebrica di più funzioni è uguale alla somma dei limiti delle medesime funzioni.*

Si abbiano n funzioni $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\varphi_3(x)$, ..., $\varphi_n(x)$, e supponiamo che al variare di x queste funzioni tendano rispettivamente verso le quantità l_1, l_2, l_3, ..., l_n, in modo che sia

$$l_1 = lim\,\varphi_1(x), \quad l_2 = lim\,\varphi_2(x), \quad \ldots\ldots, \quad l_n = lim\,\varphi_n(x).$$

Indicando con δ_r una quantità che converge a zero quando la funzione $\varphi_r(x)$ converge verso il suo limite l_r, è chiaro che potremo fare

$$\varphi_1(x) = l_1 + \delta_1, \quad \varphi_2(x) = l_2 + \delta_2, \quad \ldots\ldots, \quad \varphi_n(x) = l_n + \delta_n.$$

da cui

$$\varphi_1(x)\pm\varphi_2(x)\pm\ldots\pm\varphi_n(x)=l_1\pm l_2\pm\ldots\pm l_n+\delta_1\pm\delta_2\pm\ldots\pm\delta_n.$$

Ora è evidente che quando le funzioni convergono verso i loro limiti rispettivi, l'espressione $\delta_1\pm\delta_2\pm\ldots\pm\delta_n$ converge verso zero, in guisa che avremo

$$\lim\,[\varphi_1(x)\pm\varphi_2(x)\pm\ldots\pm\varphi_n(x)]=l_1\pm l_2\pm\ldots\pm l_n$$
$$=\lim\varphi_1(x)\pm\lim\varphi_2(x)\pm\ldots\pm\lim\varphi_n(x).$$

56 *Il limite del prodotto di più funzioni è uguale al prodotto dei limiti delle medesime funzioni.*

Se formiamo tutti i prodotti possibili di n fattori, prendendone r fra le quantità $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ e $n-r$ fra la quantità $l_1, l_2, \ldots l_n$ ed indichiamo con V_r la somma di questi prodotti, è chiaro che potremo scrivere

$$\varphi_1(x)\,\varphi_2(x)\ldots\varphi_n(x)$$
$$=(l_1+\delta_1)(l_2+\delta_2)\ldots(l_n+\delta_n)=V_0+V_1+V_2+\ldots+V_n.$$

Ora le quantità V, che contengono rispettivamente $n_0, n_1, n_2, \ldots n_n$ termini, convergono tutte a zero insieme alle δ eccetto $V_0=l_1 l_2\ldots l_n$; se quindi passiamo al limite, avremo

$$\lim\,[\varphi_1(x)\,\varphi_2(x)\ldots\varphi_n(x)]=V_0=\lim\varphi_1(x)\lim\varphi_2(x)\ldots\lim\varphi_n(x).$$

57. *Il limite del quoziente di due funzioni è uguale al quoziente dei limiti delle medesime funzioni*

Formando il quoziente delle due funzioni $\varphi_1(x)$ e $\varphi_2(x)$, avremo

$$\frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)}=\frac{l_1+\delta_1}{l_2+\delta_2}=\frac{l_1}{l_2}+\frac{\delta_1 l_2-\delta_2 l_1}{l_2(l_2+\delta_2)},$$

e passando al limite

$$\lim\left[\frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)}\right]=\frac{l_1}{l_2}=\frac{\lim\varphi_1(x)}{\lim\varphi_2(x)};$$

58. *Il limite di una potenza è uguale al limite della base innalzato al limite dell'esponente.*

Se si ha

$$y=l+\delta,\qquad z=\lambda+\varepsilon,$$

ove δ e ϵ sono quantità che convergono a zero, in guisa che l e λ sono rispettivamente i limiti delle funzioni y e z, avremo

$$y^z = (l+\delta)^{\lambda+\epsilon};$$

ovvero

$$y^z = l^\lambda \left(1+\frac{\delta}{l}\right)^\lambda \cdot l^\epsilon \left(1+\frac{\delta}{l}\right)^\epsilon;$$

ma

$$\lim \left(1+\frac{\delta}{l}\right)^\lambda = 1, \quad \lim l^\epsilon = 1, \quad \lim \left(1+\frac{\delta}{l}\right)^\epsilon = 1,$$

dunque

$$\lim y^z = l^\lambda = (\lim y)^{\lim z}.$$

59. Se $\varphi(x)$, $f(x)$ e $\psi(x)$ *sono tre funzioni che soddisfano alla relazione*

$$\varphi(x) > f(x) > \psi(x),$$

e se $\varphi(x)$ *e* $\psi(x)$ *convergono entrambe verso uno stesso limite* l, *si ha*

$$\lim f(x) = l.$$

Infatti indicando con λ un numero positivo minore di 1, potremo scrivere

$$f(x) = \psi(x) + \lambda[\varphi(x) - \psi(x)],$$

e passando al limite

$$\lim f(x) = \lim \psi(x) = l.$$

60. *Le due funzioni*

$$f(x+1) - f(x) \quad \text{e} \quad \frac{f(x)}{x},$$

convergono verso lo stesso limite se x *cresce indefinitamente.*

Indichiamo con k il limite di $f(x+1) - f(x)$ per $x = \infty$ e con δ un numero arbitrariamente piccolo.

Se in prima supponiamo che k abbia un valore finito, è chiaro che potremo sempre trovare un numero h abbastanza grande e tale che per tutti i valori di x non minori di h, la funzione $f(x+1) - f(x)$ sia sempre compresa fra $k - \delta$ e $k + \delta$. Ora

se in questa differenza sostituiamo per x successivamente i valori h, $h+1$, $h+2$, ..., $h+n-1$, e facciamo la somma dei risultati, otterremo l'espressione

$$f(h+n)-f(h),$$

che sarà compresa fra $n(k-\delta)$ e $n(k+\delta)$; in guisa che indicando con α una quantità compresa fra i limiti $-\delta$ e $+\delta$, avremo

$$\frac{f(h+n)-f(h)}{n}=k+\alpha.$$

Da questa equazione, ponendo $h+n=x$, si deduce

$$\frac{f(x)-f(h)}{x-h}=k+\alpha,$$

da cui

$$\frac{f(x)}{x}=\frac{f(h)}{x}+\left(1-\frac{h}{x}\right)(k+\alpha).$$

Se ora consideriamo h come una quantità costante e facciamo crescere n indefinitamente, x crescerà insieme ad n, talchè per $x=\infty$ avremo dall'ultima formola

$$\lim\frac{f(x)}{x}=k=\lim\left[f(x+1)-f(x)\right],$$

poichè α, che è una quantità compresa fra $-\delta$ e $+\delta$, deve necessariamente essere uguale a zero per $x=\infty$.

Se $k=\infty$, indicando con H un numero arbitrariamente grande, potremo sempre trovare un numero h tale che a cominciare da $x=h$, si abbia

$$f(x+1)-f(x)>H.$$

Ragionando allora come nel caso precedente, troveremo

$$\frac{f(h+n)-f(h)}{n}>H,$$

da cui

$$\frac{f(x)}{x}>\frac{f(h)}{x}+H\left(1-\frac{h}{x}\right),$$

e per $x = \infty$

$$\lim \frac{f(x)}{x} > H.$$

Dunque $\frac{f(x)}{x}$ dovendo essere maggiore di una quantità che può essere grande quanto si vuole, deve necessariamente aversi

$$\lim \frac{f(x)}{x} = \infty.$$

Se finalmente $k = -\infty$, è chiaro che la funzione

$$[-f(x+1)] - [-f(x)],$$

avrà per limite $+\infty$, quindi $\frac{-f(x)}{x}$ avrà altresì $+\infty$ per limite e per conseguenza $\lim \frac{f(x)}{x} = -\infty$.

61. *Se* f(x) *è positiva per grandissimi valori di* x, *le due funzioni*

$$\frac{f(x+1)}{f(x)} \quad \text{e} \quad [f(x)]^{\frac{1}{x}},$$

convergono verso lo stesso limite per $x = \infty$.

Dal teorema precedente risulta che

$$\lim \frac{\log f(x)}{x} = \lim [\log f(x+1) - \log f(x)],$$

ovvero

$$\lim \left(\log [f(x)]^{\frac{1}{x}}\right) = \lim \left[\log \frac{f(x+1)}{f(x)}\right],$$

da cui

$$\lim [f(x)]^{\frac{1}{x}} = \lim \frac{f(x+1)}{f(x)}.$$

I due ultimi teoremi sono dovuti a Cauchy.

Applicazione dei teoremi precedenti.

62. Se p è un numero intero e positivo, il limite dell'espressione

$$\frac{1^p + 2^p + 3^p + \cdots + (n-1)^p}{n^{p+1}},$$

per $n = \infty$ è $\frac{1}{p+1}$.

È noto che se $a > b > 0$, si hanno le due disuguaglianze

$$(p+1)a^p > \frac{a^{p+1} - b^{p+1}}{a-b}, \qquad (p+1)b^p < \frac{a^{p+1} - b^{p+1}}{a-b};$$

se nella prima disuguaglianza facciamo $a = z$, $b = z - 1$, e nelle seconda $a = z + 1$, $b = z$, avremo

$$\frac{(z+1)^{p+1} - z^{p+1}}{p+1} > z^p > \frac{z^{p+1} - (z-1)^{p+1}}{p+1}.$$

Diamo a z i valori successivi $1, 2, 3, \ldots\ n-1$ e facciamo la somma di tutte le disuguaglianze che ne risultano, avremo

$$\frac{n^{p+1} - 1}{p+1} > 1^p + 2^p + 3^p + \cdots + (n-1)^p > \frac{(n-1)^{p+1}}{p+1},$$

da cui

$$\frac{1 - \left(\frac{1}{n}\right)^{p+1}}{p+1} > \frac{1^p + 2^p + 3^p + \cdots + (n-1)^p}{n^{p+1}} > \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{p+1}}{p+1}.$$

Ma per n crescente indefinitamente, si ha

$$lim \left[\frac{1 - \left(\frac{1}{n}\right)^{p+1}}{p+1}\right] = lim \left[\frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{p+1}}{p+1}\right] = \frac{1}{p+1};$$

dunque (59)

$$lim \frac{1^p + 2^p + 3^p + \cdots + (n-1)^p}{n^{p+1}} = \frac{1}{p+1}.$$

63. Il limite dell' espressione

$$\frac{sen\,\frac{x}{n}+sen\,\frac{2x}{n}+\cdots+sen\,\frac{(n-1)\,x}{n}}{n}$$

per $n=\infty$ è $\frac{1-\cos x}{x}$.

Abbiamo veduto che (49)

$$sen\,\frac{x}{n}+sen\,\frac{2x}{n}+\cdots+sen\,\frac{(n-1)\,x}{n}$$

$$=\frac{\cos\frac{x}{2n}-\cos\left(1+\frac{1}{2n}\right)x}{2\,sen\,\frac{x}{2n}}-sen\,x=\frac{\cos\frac{x}{2n}-\cos\left(1-\frac{1}{2n}\right)x}{2\,sen\,\frac{x}{2n}};$$

quindi

$$\frac{sen\,\frac{x}{n}+sen\,\frac{2x}{n}+\cdots+sen\,\frac{(n-1)x}{n}}{n}=\frac{\cos\frac{x}{2n}-\cos\left(1-\frac{1}{2n}\right)x}{2n\,sen\,\frac{x}{2n}}$$

$$=\frac{\cos\frac{x}{2n}-\cos\left(1-\frac{1}{2n}\right)x}{x}\cdot\frac{\frac{x}{2n}}{sen\,\frac{x}{2n}};$$

e passando al limite

$$lim\,\frac{sen\,\frac{x}{n}+sen\,\frac{2x}{n}+\cdots+sen\,\frac{(n-1)x}{n}}{n}=\frac{1-\cos x}{x}.$$

64 Il limite dell' espressione

$$\frac{1+\cos\frac{x}{n}+\cos\frac{2x}{n}+\cdots+\cos\frac{(n-1)\,x}{n}}{n}$$

per $n=\infty$ è $\frac{sen\,x}{x}$.

Per una formola conosciuta (49) si ha

$$\frac{1+\cos\frac{x}{n}+\cos\frac{2x}{n}+\cdots\cos\frac{(n-1)x}{n}}{n}=\frac{sen\frac{x}{2n}+sen\left(1-\frac{1}{2n}\right)x}{2n\,sen\frac{x}{2n}}$$

$$=\frac{sen\frac{x}{2n}+sen\left(1-\frac{1}{2n}\right)x}{x}\cdot\frac{\frac{x}{2n}}{sen\frac{x}{2n}},$$

e passando al limite

$$\lim\frac{1+\cos\frac{x}{n}+\cos\frac{2x}{n}+\cdots+\cos\frac{(n-1)x}{n}}{n}=\frac{sen\,x}{x}.$$

65. Un' altra formola notevole si ottiene cercando il limite dell' espressione

$$\frac{arc\,sen\,(z+\delta)-arc\,sen\,z}{\delta},$$

per $\delta=0$.

Se facciamo $z+\delta=sen(\alpha+\beta)$ e $z=sen\,\alpha$, ove α e $\alpha+\beta$ sono archi del primo quadrante, avremo

$$arc\,sen\,(z+\delta)-arc\,sen\,z=\beta.$$

Ma dalla Trigonometria si ha

$$\frac{sen\,(\alpha+\beta)-sen\,\alpha}{\beta}=\cos(\alpha+\tfrac{1}{2}\beta)\,\frac{sen\,\frac{1}{2}\beta}{\frac{1}{2}\beta},$$

e poichè

$$\cos(\alpha+\tfrac{1}{2}\beta)<\cos\alpha,\quad \frac{sen\,\frac{1}{2}\beta}{\frac{1}{2}\beta}<1,$$

ne segue

$$\frac{sen\,(\alpha+\beta)-sen\,\alpha}{\beta}<\cos\alpha;$$

ovvero

$$\frac{\delta}{\sqrt{1-z^2}}<\beta,$$

e per conseguenza

$$\frac{1}{\sqrt{1-z^2}} < \frac{arc\ sen\,(z+\delta) - arc\ sen\ z}{\delta}.$$

Parimente se osserviamo che

$$2\cos(\alpha - \tfrac{1}{2}\beta)\cos\tfrac{1}{2}\beta = \cos\alpha + \cos(\alpha-\beta) < 2\cos\alpha,$$

e che

$$\frac{sen\,\frac{1}{2}\beta}{\frac{1}{2}\beta} > \cos\tfrac{1}{2}\beta,$$

dalla formola

$$\frac{sen\,\alpha - sen\,(\alpha-\beta)}{\beta} = \cos(\alpha - \tfrac{1}{2}\beta)\frac{sen\,\frac{1}{2}\beta}{\frac{1}{2}\beta},$$

deduciamo

$$\frac{sen\,\alpha - sen\,(\alpha-\beta)}{\beta} > \cos\alpha,$$

da cui

$$\frac{sen\,(\alpha+\beta) - sen\,\alpha}{\cos(\alpha+\beta)} > \beta,$$

ovvero

$$\frac{1}{\sqrt{1-(z+\delta)^2}} > \frac{arc\ sen\,(z+\delta) - arc\ sen\ z}{\delta}.$$

Laonde avremo

$$\frac{1}{\sqrt{1-z^2}} < \frac{arc\ sen\,(z+\delta) - arc\ sen\ z}{\delta} < \frac{1}{\sqrt{1-(z+\delta)^2}},$$

e per conseguenza

$$\lim \frac{arc\ sen\,(z+\delta) - arc\ sen\ z}{\delta} = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}.$$

Da questa formola, indicando con ϵ una quantità che converge a zero insieme a δ, dedurremo

$$\frac{arc\ sen\,(z+\delta) - arc\ sen\ z}{\delta} = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} + \epsilon.$$

Se facciamo la somma di tutte le equazioni che si deducono dalla precedente sostituendo per z successivamente i numeri 0, δ,

$2\delta, \ldots, (n-1)\delta$ e indichiamo con $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{n-1}$ i valori corrispondenti che prende ε, avremo

$$\frac{arc\ sen\ n\delta}{\delta} = 1 + \frac{1}{\sqrt{1-\delta^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-(2\delta)^2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{1-[(n-1)\delta]^2}}$$
$$+\varepsilon_0 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_{n-1}.$$

Supponiamo che al diminuire di δ, corrisponda un tale accrescimento di n che il prodotto $n\delta$ conservi un valore costante che indicheremo con x; l'ultima eguaglianza diventa

$$\frac{arc\ sen\ x}{x}$$
$$= \frac{1}{n}\left[1 + \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{n}\right)^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{2x}{n}\right)^2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{1-\left[\frac{(n-1)x}{n}\right]^2}}\right]$$
$$+ \frac{1}{n}\left[\varepsilon_0 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_{n-1}\right];$$

da cui segue

$$\lim \frac{1}{n}\left[1 + \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{n}\right)^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{2x}{n}\right)^2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{1-\left[\frac{(n-1)x}{n}\right]^2}}\right]$$
$$= \frac{arc\ sen\ x}{x},$$

che è la formola che volevamo trovare.

66. Il limite dell'espressione

$$\frac{\beta(\beta+1)(\beta+2)\ldots(\beta+n-1)}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+n-1)},$$

ove α e β sono quantità positive è uguale a zero o all'infinito secondochè α è maggiore o minore di β.

Supponiamo prima che si abbia $\alpha > \beta$; allora è noto che per valori interi e positivi di k e per qualunque valore positivo di x si ha (62)

$$(1+x)^k > 1 + kx, \quad \frac{1}{1+x} < \left(\frac{1}{1+kx}\right)^{\frac{1}{k}}.$$

Se quindi poniamo $x = \frac{\alpha - \beta}{\beta + m}$, $\beta + m > 0$, avremo

$$\frac{\beta + m}{\alpha + m} < \left(\frac{\beta + m}{\beta + m + k(\alpha - \beta)}\right)^{\frac{1}{k}}.$$

Prendiamo k in modo che si abbia

$$k \geq \frac{1}{\alpha - \beta}, \quad \text{da cui} \quad k(\alpha - \beta) \geq 1\,;$$

avremo a più forte ragione

$$\frac{\beta + m}{\alpha + m} < \left(\frac{\beta + m}{\beta + m + 1}\right)^{\frac{1}{k}}.$$

Dando a m i valori successivi $0, 1, 2, \ldots\ldots n-1$; moltiplicando le disuguaglianze che ne risultano e osservando che l'espressione data è > 0, otterremo

$$0 < \frac{\beta(\beta+1)(\beta+2)\ldots\ldots(\beta+n-1)}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots\ldots(\alpha+\alpha-1)} < \left(\frac{\beta}{\beta+n}\right)^{\frac{1}{k}};$$

e per $n = \infty$

$$\lim \frac{\beta(\beta+1)(\beta+2)\ldots\ldots(\beta+n-1)}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots\ldots(\alpha+n-1)} = 0.$$

Il caso di $\alpha < \beta$ si riduce al precedente osservando che

$$\frac{\beta(\beta+1)(\beta+2)\ldots(\beta+n-1)}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+n-1)} = \frac{1}{\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+n-1)}{\beta(\beta+1)(\beta+2)\ldots(\beta+n-1)}},$$

e da questa eguaglianza apparisce manifesto che per $\alpha < \beta$ si ha

$$\lim \frac{\beta(\beta+1)(\beta+2)\ldots\ldots(\beta+n-1)}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots\ldots(\alpha+n-1)} = \infty.$$

67. Il limite della funzione

$$\frac{\log x}{x},$$

per $x = \infty$ è uguale a zero se la base dei logaritmi è un numero maggiore dell'unità.

Infatti si ha (60)

$$lim \frac{log\, x}{x} = lim\, [log\, (x+1) - log\, x] = lim \left[log\left(1+\frac{1}{x}\right)\right],$$

ovvero

$$lim \frac{log\, x}{x} = log\,(1) = 0\,,$$

68. Il limite della funzione

$$[log\, x]^{\frac{1}{x}},$$

per $x = \infty$ è uguale a 1.

Si ha (61)

$$lim\, [log\, x]^{\frac{1}{x}} = lim \frac{log\,(x+1)}{log\, x} = lim \frac{log\, x + log\left(1+\frac{1}{x}\right)}{log\, x},$$

ovvero

$$lim\, [log\, x]^{\frac{1}{x}} = lim \left[1 + \frac{log\left(1+\frac{1}{x}\right)}{log\, x}\right] = 1.$$

Rappresentazione geometrica delle funzioni.

69. Le funzioni di una variabile si possono rappresentare geometricamente, lo che oltre ad avere una grandissima importanza perchè permette di applicare l'Algebra alla Geometria, dà il modo di rendere quasi intuitive talune verità ottenute con calcoli più o meno complicati. Per determinare la posizione di un punto situato sopra un piano si usa ordinariamente di riferirlo a due rette fisse che si tagliano ortogonalmente nel piano; il punto d'incontro di queste rette si dice *origine*, una delle rette prende il nome di *asse delle* x, e quella perpendicolare di *asse delle* y. Se sull'asse delle x a cominciare dall'origine si prendono lunghezze eguali a determinati valori della variabile x e per i punti così ottenuti s'innalzano perpendicolari eguali a valori corrispondenti di y, si avranno dei punti completamente determinati, il cui insieme costituirà una linea retta o curva, ch'è la rappresentazione geometrica della funzione $f(x)$. Anche le funzioni di

due variabili si possono rappresentare geometricamente, ma per tale oggetto rimandiamo ai *Trattati di Geometria Analitica.*

Sulla continuità delle funzioni.

70. Una funzione $f(x)$ di una variabile reale x, si dice *continua* fra due valori determinati di x, $x=a$ e $x=b$, se per ogni valore di x compreso fra a e b la funzione prende un solo valore finito e se facendo variare x in modo continuo, cioè in tal guisa che passi per tutti i valori intermedi fra a e b, $f(x)$ vari altresì in modo continuo; o in altre parole se mentre il punto che rappresenta x percorre in modo continuo l'asse delle x, il punto rappresentato dal valore corrispondente di y percorre una linea continua nel piano. Se queste condizioni non si verificano, la funzione si dice *discontinua*.

71. Da questa definizione risulta manifestamente che indicando con δ una quantità piccolissima *la condizione necessaria e sufficiente affinchè* f(x) *sia una funzione continua è che*

$$\lim\,[f(x+\delta)-f(x)]=0, \quad \text{per} \quad \delta=0,$$

Questo criterio può porsi sotto un'altra forma. Infatti è chiaro che se δ e ϵ sono due quantità che convergono simultaneamente a zero, le due funzioni $f(x+\delta)$ e $f(x-\epsilon)$ avranno limiti eguali o differenti, secondochè $f(x)$ è una funzione continua o discontinua; quindi possiamo enunciare il seguente teorema:

La condizione necessaria e sufficiente affinchè la funzione f(x) *sia continua fra due valori dati di* x *è che per tutti i valori di* x *compresi fra questi limiti si abbia*

$$\lim\,[f(x+\delta)-f(x-\epsilon)]=0\,,$$

e ciò ch'è lo stesso

$$\lim\frac{f(x+\delta)}{f(x-\epsilon)}=1.$$

Si abbia per es.

$$f(x)=\frac{c+b}{2}+\frac{c-b}{\pi}\,\text{arc tan}\,\frac{a}{x-a}\,;$$

questa funzione ammette una soluzione di continuità per $x=a$; infatti calcolando le funzioni $f(a-\varepsilon)$ e $f(a+\delta)$ si trova

$$f(a-\varepsilon)=\frac{c+b}{2}+\frac{c-b}{\pi}\, arc\, tan\, \frac{a}{-\varepsilon}$$

$$=\frac{c+b}{2}-\frac{c-b}{\pi}\, arc\, tan\, \frac{a}{\varepsilon}$$

$$f(a+\delta)=\frac{c+b}{2}+\frac{c-b}{\pi}\, arc\, tan\, \frac{a}{\delta};$$

da cui

$$f(a-0)=\frac{c+b}{2}-\frac{c-b}{\pi}\frac{\pi}{2}=b$$

$$f(a+0)=\frac{c+b}{2}+\frac{c-b}{\pi}\frac{\pi}{2}=c.$$

Come secondo esempio consideriamo la funzione

$$f(x)=\frac{a^2}{x-b}.$$

Si ha

$$f(x+\delta)-f(x-\varepsilon)=\frac{a^2}{x+\delta-b}-\frac{a^2}{x-\varepsilon-b}.$$

Per tutti i valori di x differenti da b questa differenza ha per limite zero; ma per $x=b$, essa si riduce a

$$f(b+\delta)-f(b-\varepsilon)=\frac{a^2}{\delta}+\frac{a^2}{\varepsilon},$$

che cresce indefinitamente al diminuire di δ e di ε. Quindi la funzione proposta ammette una soluzione di continuità per $x=b$, ove essa passa da $-\infty$ a $+\infty$.

72. *La somma di un numero determinato di funzioni continue è altresì una funzione continua.*

Si abbia

$$f(x)=\varphi_1(x)+\varphi_2(x)+\cdots+\varphi_n(x);$$

ove $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ... $\varphi_n(x)$ sono funzioni continue di x. Indicando con h una quantità positiva, avremo

$$f(x+h)-f(x)$$
$$=[\varphi_1(x+h)-\varphi_1(x)]+[\varphi_2(x+h)-\varphi_2(x)]+\cdots[\varphi_n(x+h)-\varphi_n(x)],$$

e ciascuna delle differenze che compongono il secondo membro si potrà rendere piccola quanto si vuole mediante una conveniente scelta del valore di h. Ciò posto, se indichiamo con ρ un numero positivo < 1, potremo sempre supporre h tale che ciascuna delle differenze sopradette sia compresa fra $-\rho$ e $+\rho$; in modo che avremo

$$-n\rho < f(x+h) - f(x) < n\rho.$$

Se facciamo convergere a zero ρ, poichè n è un numero costante, avremo

$$\lim [f(x+h) - f(x)] = 0.$$

Se una delle funzioni $\varphi(x)$ è discontinua per un dato valore di x sarà pure discontinua $f(x)$ per lo stesso valore di x. Ma se più funzioni fossero discontinue non ne segue necessariamente che la loro somma debba essere discontinua, potendo benissimo accadere che le funzioni discontinue spariscano dalla somma; così le due funzioni $\sec x$ e $x^2 - \sec x$ sono discontinue, pure la loro somma x^2 è una funzione continua.

73. *Il prodotto di un numero determinato di funzioni continue è una funzione continua.*

Sia

$$f(x) = \varphi_1(x)\,\varphi_2(x) \ldots \varphi_n(x),$$

ove $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ... $\varphi_n(x)$ sono funzioni continue; avremo

$$\frac{f(x+\delta)}{f(x-\epsilon)} = \frac{\varphi_1(x+\delta)}{\varphi_1(x-\epsilon)} \cdot \frac{\varphi_2(x+\delta)}{\varphi_2(x-\epsilon)} \cdots \frac{\varphi_n(x+\delta)}{\varphi_n(x-\epsilon)}.$$

Ciascuno dei quozienti che compongono il secondo membro può differire dall'unità tanto poco quanto ci piace; quindi potremo scegliere δ e ϵ in modo che ciascuno di questi quozienti sia compreso fra $1-\rho$ e $1+\rho$, ove ρ è un numero arbitrario positivo < 1; talchè avremo

$$(1-\rho)^n < \frac{f(x+\delta)}{f(x-\epsilon)} < (1+\rho)^n;$$

e facendo convergere ρ a zero,

$$\lim \frac{f(x+\delta)}{f(x-\epsilon)} = 1.$$

Anche in questo caso la funzione $f(x)$ è discontinua se una delle funzioni $\varphi(x)$ è discontinua; ma non può affermarsi lo stesso se più funzioni sono discontinue, come sarebbe per es. il caso delle due funzioni $\tan x$ e $x \cot x$ che sono entrambe discontinue mentre il loro prodotto x è continuo.

74. Se si ha

$$f(x) = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)},$$

non è sempre vero in generale che $f(x)$ sarà continua se tali sono $\varphi(x)$ e $\psi(x)$. Infatti è chiaro che questa conchiusione cessa di essere vera se per un certo valore di x, $\psi(x)$ diventa eguale a zero e $\varphi(x)$ prende un valore finito diverso da zero.

75. Una funzione $f(x, y, z, \ldots)$ di più variabili reali $x, y, z, \ldots$, si dice continua se è continua rispetto a ciascuna di queste variabili in particolare. Se indichiamo con $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ delle quantità piccolissime che convergono a zero, è chiaro che avremo

$$\lim_{\alpha=0} \left[f(x+\alpha, y, z, \ldots) - f(x, y, z, \ldots) \right] = 0,$$

$$\lim_{\beta=0} \left[f(x+\alpha, y+\beta, z, \ldots) - f(x+\alpha, y, z, \ldots) \right] = 0,$$

$$\lim_{\gamma=0} \left[f(x+\alpha, y+\beta, z+\gamma, \ldots) - f(x+\alpha, y+\beta, z, \ldots) \right] = 0,$$

. . . .

Da queste equazioni si deduce evidentemente

$$\lim \left[f(x+\alpha, y+\beta, z+\gamma, \ldots) - f(x, y, z, \ldots) \right] = 0,$$

per

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad \gamma = 0, \quad \ldots,$$

76. Una funzione

$$P + Q\sqrt{-1},$$

di una variabile complessa $x + y\sqrt{-1}$ si chiama continua, se P e Q sono funzioni continue di x e di y. Se in questa ipotesi si fa percorrere all'indice della variabile una linea continua, l'indice della funzione descriverà altresì una linea continua.

CAPITOLO IV.

SERIE.

Definizioni e Considerazioni generali.

77. Si chiama *serie* un aggregato di quantità

$$u_1, \ u_2, \ u_3, \ \dots \ u_n, \ \dots,$$

che procedono con legge determinata e il cui numero è infinito.

Le serie sono reali o complesse secondochè i termini corrispondenti sono numeri reali o complessi.

Il valore di ciascun termine di una serie dipende dal posto che esso occupa; quindi è una funzione dell'indice n, cioè $u_n = f(n)$.

La funzione u_n che dà la legge di dipendenza dei termini di una serie si dice *termine generale*. Così la serie

$$1, \ 4, \ 9, \ 16, \ 25, \ \dots,$$

ha per termine generale n^2.

78. Data una serie, si possono presentare tre casi. La somma

$$S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n,$$

dei primi n termini della serie, può convergere verso un limite finito e determinato a misura che n aumenta; in questo caso la serie si dice *convergente*, e il limite di S_n si chiama la *somma* o il *valore* della serie. S_n può convergere verso quantità finite, ma diverse a seconda del valore di n; allora la serie si dice *indeterminata*. Finalmente la somma S_n può crescere indefinitamente con n; lo che si esprime dicendo che la serie è *divergente*. Così delle tre serie

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots$$

$$1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$$

$$1 + 2 + 3 + 4 + \cdots$$

la prima è convergente, la seconda indeterminata, la terza divergente. Infatti il termine generale della prima è uguale a $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, in guisa che si ha

$$S_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1},$$

da cui

$$\lim S_n = 1.$$

La seconda serie converge verso 1 o verso 0 secondo che S_n è la somma di un numero dispari o di un numero pari di termini. La terza serie cresce al di là di ogni limite con n.

79. Una serie complessa

$$(\alpha_1 + \beta_1 \sqrt{-1}) + (\alpha_2 + \beta_2 \sqrt{-1}) + \cdots + (\alpha_n + \beta_n \sqrt{-1}) + \cdots$$

si dice convergente se sono convergenti le due serie reali

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n + \cdots, \qquad \beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_n + \cdots$$

Se una di queste due serie è indeterminata mentre l'altra è convergente, o se entrambe sono indeterminate, la serie complessa è indeterminata. Finalmente se una delle serie reali è divergente o se lo sono tutte e due, la serie complessa è divergente.

80. Se indichiamo con S la somma di una serie convergente e con R_n la somma di tutti i termini che seguono l'*ennesimo*, avremo

$$S = S_n + R_n.$$

La quantità R_n si chiama *resto* della serie. È chiaro che se $\lim R_n = 0$ la serie è convergente e reciprocamente.

81. Da ciò segue che in qualunque serie convergente il termine generale u_n deve avere per limite zero. Infatti la serie essendo convergente, avremo

$$S_n + R_n = S, \quad S_{n-1} + R_{n-1} = S,$$

da cui

$$u_n + R_n - R_{n-1} = 0;$$

ma R_n e R_{n-1} hanno per limite zero, dunque

$$\lim u_n = 0.$$

La reciproca di questa proposizione non è però vera; si può solamente affermare che se $\lim u_n = 0$ la serie non può essere indeterminata. E invero se la serie è indeterminata, S_n e S_{n-1} debbono convergere verso limiti finiti ma differenti; quindi la differenza $S_n - S_{n-1} = u_n$ dovrà avere per limite una quantità finita diversa da zero.

Ma la serie potrà essere divergente: così la serie

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$$

soddisfa alla condizione che il suo termine generale $\frac{1}{n}$ ha per limite zero, eppure è divergente. Infatti si ha

$$S_{2n} - S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}$$

$$> \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \cdots + \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Ora affinchè la serie fosse convergente bisognerebbe che la differenza $S_{2n} - S_n$ avesse per limite zero, lo che è provato impossibile dall'ultima disuguaglianza.

82. Una serie che ha tutti i termini dello stesso segno non può essere indeterminata. Affinchè una serie i cui termini non hanno tutti lo stesso segno sia indeterminata, è indispensabile che la serie formata dai soli termini positivi e quella formata dai soli termini negativi sieno entrambe serie divergenti. Indichiamo infatti con S_n la somma dei primi n termini della serie proposta, con P_n la somma dei termini positivi contenuti in S_n e con Q_n la somma dei termini negativi; avremo

$$S_n = P_n - Q_n, \quad \text{e} \quad \lim S_n = \lim P_n - \lim Q_n.$$

Ora se $\lim P_n$ e $\lim Q_n$ sono quantità finite, anche $\lim S_n$ sarà una quantità finita e determinata, e per conseguenza la serie data sarà convergente. Se poi una delle quantità P_n e Q_n ha un limite finito e l'altra ha l'infinito per limite, allora è chiaro che

la serie data sarà divergente. Ma se tanto P_n quanto Q_n sono quantità che crescono indefinitamente con n, può benissimo accadere che la loro differenza converga verso limiti determinati e differenti a seconda del valore di n.

83. Una serie non può venire usata nelle ricerche analitiche se non è convergente. Talchè data una serie bisognerebbe poter sempre decidere se essa è convergente o in quali casi è tale.

La quistione si risolverebbe facilmente tutte le volte che fosse possibile in ogni caso determinare la somma dei primi n termini della serie. Consideriamo per esempio la serie

$$1+\frac{\beta}{\alpha+\beta}+\frac{\beta(\beta+1)}{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1)}+\frac{\beta(\beta+1)(\beta+2)}{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta+2)}+\text{ec.}$$

ove α e β sono quantità positive.

Ora è facile verificare che

$$u_n=\frac{\beta(\beta+1)\dots(\beta+n-2)}{(\alpha+\beta-1)(\alpha+\beta)\dots(\alpha+\beta+n-3)}-\frac{\beta(\beta+1)\dots(\beta+n-1)}{(\alpha+\beta-1)\dots(\alpha+\beta+n-2)}$$

$$=\frac{\alpha-1}{\alpha+\beta-1}\cdot\frac{\beta(\beta+1)\;\dots\;(\beta+n-2)}{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1)\dots(\alpha+\beta+n-2)}\,.$$

Sommando questa eguaglianza con tutte quelle che se ne deducono sostituendo successivamente $n-1,\ n-2,\ \dots,\ 3,\ 2$ invece di n, e aggiungendo l'espressione $\frac{\alpha-1}{\alpha+\beta-1}$ ai due membri dell'identità che ne risulta, troveremo

$$S_n=\frac{\alpha+\beta-1}{\alpha-1}\left[1-\frac{\beta(\beta+1)\dots(\beta+n-1)}{(\alpha+\beta-1)(\alpha+\beta)\dots(\alpha+\beta+n-2)}\right],$$

ove S_n indica la somma dei primi n termini della serie proposta.

Ma per $n=\infty$ l'espressione (66)

$$\frac{\beta(\beta+1)\dots(\beta+n-1)}{(\alpha+\beta-1)(\alpha+\beta)\dots(\alpha+\beta+n-2)}$$

ha per limite 0 o ∞ secondochè α è $>$ o <1. Dunque la serie data è convergente se $\alpha>1$, divergente se $\alpha<1$.

Quando si verifica la prima ipotesi, si ha

$$\frac{\alpha+\beta-1}{\alpha-1}$$

$$=1+\frac{\beta}{\alpha+\beta}+\frac{\beta(\beta+1)}{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1)}+\frac{\beta(\beta+1)(\beta+2)}{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta+2)}+\text{ec.}$$

Se $\alpha=1$ la somma S_n si presenta sotto la forma indeterminata $\frac{0}{0}$; ma in questo caso la serie è divergente. (Vedi il nº 86).

84. Come secondo esempio prendiamo la progressione geometrica

$$1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3+\cdots.$$

È noto che

$$1+\alpha+\alpha^2+\cdots+\alpha^{n-1}=\frac{1-\alpha^n}{1-\alpha}=\frac{1}{1-\alpha}-\frac{\alpha^n}{1-\alpha}.$$

Ma per $n=\infty$ la quantità $\frac{\alpha^n}{1-\alpha}$ ha per limite zero o l'infinito secondochè α è $<$ o >1; inoltre è evidente che la serie proposta è divergente per $\alpha=1$, indeterminata per $\alpha=-1$; quindi possiamo enunciare il seguente teorema:

Una progressione geometrica

$$1+\alpha+\alpha^2+\cdots,$$

è convergente se $\alpha<1$, divergente se $\alpha\geq 1$, indeterminata se $\alpha=-1$.

Quando si verifica il primo caso, si ha

$$1+\alpha+\alpha^2+\cdots=\frac{1}{1-\alpha}.$$

85. Negli esempii che abbiamo dati è stato facile determinare la somma dei primi n termini della serie proposta, ma nella maggior parte dei casi questa ricerca è di gran lunga più difficile di quella che ha per oggetto di scoprire direttamente i criterii di convergenza delle serie. Nello stato presente dell'Analisi non si conoscono criterii generali ed applicabili a tutti i casi possibili, ma si hanno varie regole di molta importanza, come quelle che sono sufficienti per un gran numero di serie e di facile applica-

zione. Alla ricerca delle principali fra queste regole che non richieggono mezzi superiori a quelli che offre l'Analisi Algebrica, saranno consacrati i Capitoli V e X; nel Capitolo presente raccoglieremo parecchi teoremi, i quali oltre ad essere di gran rilievo per la teoria generale delle serie, servono altresì di fondamento alle dottrine che saranno svolte nella prima Parte di questo Trattato.

Confronto fra due Serie.

Il confronto fra due serie, di una delle quali sia già nota la convergenza o la divergenza, è il mezzo che più comunemente si adopera per riconoscere se una serie è convergente o divergente e per ottenere criterii generali di convergenza. Per agevolare questo paragone, giovano grandemente i seguenti teoremi:

86. *Se nelle due serie a termini positivi*

$$V = v_1 + v_2 + \cdots + v_n + \cdots$$
$$U = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$$

i termini della seconda serie sono minori dei termini corrispondenti della prima, la serie U *è convergente insieme alla serie* V *e la serie* V *è divergente insieme alla serie* U.

Infatti, indicando con V_n e U_n rispettivamente le somme dei primi n termini delle serie V e U, avremo

$$U_n < V_n;$$

quindi U_n converge verso una quantità finita al crescere di n se la serie V è convergente; e V_n aumenta insieme con n se la serie U è divergente.

È chiaro che la prima parte del teorema sussiste altresì se i termini della serie U non hanno tutti lo stesso segno.

Esempio. La serie $\sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{1}{\beta + s}$ è divergente qualunque sia β.

Se β è un numero intero e positivo, il teorema è stato già dimostrato (81). Se β è un numero positivo ma non intero, sarà compreso fra due numeri interi consecutivi $n-1$ e n; quindi la serie precedente avrà i suoi termini maggiori di quelli corrispondenti della serie divergente $\sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{1}{n+s}$.

Se finalmente β è un numero negativo, la serie $\sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{1}{s-\beta}$ è divergente, poichè ha i suoi termini maggiori rispettivamente dei termini della serie divergente $\sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{1}{n+s-\beta}$.

87. Dal teorema precedente si deduce che *una serie complessa è convergente, se è convergente la serie formata dai moduli dei suoi termini.*

Infatti, se la serie complessa data ha per termine generale $\alpha_n + \beta_n i$, posto $\alpha_n = \rho_n \cos\theta_n$, $\beta_n = \rho_n \operatorname{sen}\theta_n$, la serie

$$\rho_1(\cos\theta_1 + i \operatorname{sen}\theta_1) + \rho_2(\cos\theta_2 + i \operatorname{sen}\theta_2) + \cdots$$

è convergente insieme alle due serie reali

$$\rho_1 \cos\theta_1 + \rho_2 \cos\theta_2 + \cdots$$
$$\rho_1 \operatorname{sen}\theta_1 + \rho_2 \operatorname{sen}\theta_2 + \cdots$$

Ora queste due ultime serie sono convergenti se è tale la serie

$$\rho_1 + \rho_2 + \cdots ;$$

dunque la serie proposta è convergente se è convergente la serie dei moduli.

La reciproca di questa proposizione non è sempre vera. Così vedremo or ora che la serie che ha per termine generale

$$\frac{1}{n}\left(\cos\frac{nx}{2} + i \operatorname{sen}\frac{nx}{2}\right),$$

è convergente per tutti i valori di x che non sono multipli pari di π, mentre la serie dei moduli

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots ,$$

è divergente.

88. *Se α_n è una funzione di* n *che al crescere di* n *tende verso un limite finito, le due serie*

$$U = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots ,$$
$$U' = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 + \cdots ,$$

convergeranno e divergeranno insieme.

Indichiamo con U_n e U'_n le somme rispettive dei primi n termini delle serie date, e con Δ e δ rispettivamente il massimo e il minimo valore che ha α in U'_n, avremo

$$U'_n > U_n \delta \quad \text{e} \quad U'_n < U_n \Delta.$$

Queste due disuguaglianze dimostrano il teorema.

89. Giova osservare che se la serie

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \cdots,$$

è convergente o indefinitamente decrescente, la serie U' è convergente anche se la serie U è indeterminata. Infatti dalla formola $U'_n < U_n \Delta$ si deduce che la serie U' non può essere divergente, e la formola $\lim \alpha_n u = 0$ mostra che questa serie non può essere indeterminata; dunque dev' essere convergente.

Esempio 1°. La serie

$$\tfrac{1}{2} a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + a_3 \cos 3x + \cdots,$$

ove $a_0, a_1, a_2, \ldots$ sono quantità positive che formano una serie indefinitamente decrescente, è convergente per tutti i valori di x che non sono multipli pari di π; poichè la serie

$$\tfrac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cdots,$$

è indeterminata per tutti i valori di x diversi da $2k\pi$, ove k è un numero intero qualunque.

Infatti, se facciamo

$$S_n = \tfrac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \cdots + \cos (n-1)x,$$

si ha (49)

$$S_n = \frac{\operatorname{sen} \dfrac{(2n-1)x}{2}}{2 \operatorname{sen} \dfrac{x}{2}};$$

e da questa formola apparisce manifesto che S_n al crescere di n non converge verso alcun limite determinato.

Se nella serie data sostituiamo $\pi - x$ per x, risulta dal teorema precedente che la serie

$$\tfrac{1}{2} a_0 - a_1 \cos x + a_2 \cos 2x - a_3 \cos 3x + \cdots,$$

è convergente per tutti i valori di x che non sono multipli dispari di π.

Esempio 2°. La serie

$$b_1 \operatorname{sen} x + b_2 \operatorname{sen} 2x + b_3 \operatorname{sen} 3x + \cdots,$$

ove $b_1, b_2, b_3, \ldots$, sono quantità positive che formano una serie indefinitamente decrescente, è convergente per qualunque valore di x.

Infatti la serie

$$\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen} 3x + \cdots,$$

è indeterminata, poichè posto

$$S_n = \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 2x + \cdots + \operatorname{sen}(n-1)x,$$

si ha (49)

$$S_n = \frac{\cos\frac{x}{2} - \cos\frac{(2n-1)x}{2}}{2 \operatorname{sen}\frac{x}{2}},$$

la quale formola mostra chiaramente che S_n non ha limite determinato eccetto per valori di x che sieno multipli di π; nel qual caso la serie proposta è uguale a zero.

Sostituendo $\pi - x$ per x, la serie

$$b_1 \operatorname{sen} x - b_2 \operatorname{sen} 2x + \cdots,$$

è anche convergente per qualunque valore di x.

90. *La serie*

$$U = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots,$$

è convergente o divergente insieme alla serie

$$V = v_1 + v_2 + \cdots + v_n + \cdots,$$

secondochè a cominciare da un certo termine sino all'infinito il rapporto $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ *di due termini consecutivi della prima serie è mi-*

nore o maggiore del rapporto corrispondente $\frac{v_{n+1}}{v_n}$ *di due termini consecutivi della seconda serie.*

La serie

$$u_n \frac{v_1}{v_n} + u_n \frac{v_2}{v_n} + \cdots + u_n + u_n \frac{v_{n+1}}{v_n} + \cdots ,$$

che si ottiene moltiplicando la serie V per $\frac{u_n}{v_n}$, è convergente e divergente insieme alla serie V.

Ora a cominciare dal termine $(n+1)^{esimo}$, i termini della serie U saranno minori o maggiori dei termini corrispondenti dell'ultima serie secondochè il rapporto $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ è minore o maggiore del rapporto $\frac{v_{n+1}}{v_n}$. Quindi la serie U sarà convergente o divergente insieme alla serie V secondochè è soddisfatta la prima o la seconda condizione.

91. *Le due serie*

$$U = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots ,$$
$$V = u_0 + v u_v + v^2 u_{v^2} + \cdots + v^n u_{v^n} + \cdots ,$$

sono simultaneamente convergenti e divergenti, se v *è un numero intero e positivo maggiore di* 1, *e se i termini della prima serie sono decrescenti.*

Indicando con m un numero qualunque intero e positivo, si ha

$$v^{m+1} u_{v^{m+1}} < v \left(u_{v^m+1} + u_{v^m+2} + \cdots + u_{v^{m+1}} \right).$$

Infatti i termini del primo membro sono minori di quelli del secondo e in minor numero, poichè il primo ne contiene v^{m+1} e il secondo $v^{m+2} - v^{m+1}$, e si ha $v^{m+1} \leq v^{m+2} - v^{m+1}$, per tutti i valori di v che soddisfano alla relazione $v \geq 2$.

Se ora sommiamo la disuguaglianza $u_0 < v(u_0 + u_1)$ con quelle che si deducono dall'ultima formola dando a m i valori $0, 1, 2, \ldots, n-1$, e indichiamo con U_n e V_n le somme dei primi n termini delle serie U e V, avremo

$$V_{n+1} < v U_{v^n+1} ,$$

Quindi se la serie U è convergente sarà pure convergente la serie V, e se la serie V è divergente, tale sarà altresì la serie U.

Parimente sommando le disuguaglianze

$$
\begin{aligned}
vu_0 &> u_0 + u_1 + \cdots + u_{v-1}, \\
v^2 u_v &> u_v + u_{v+1} + \cdots + u_{v^2}, \\
v^3 u_{v^2} &> u_{v^2+1} + u_{v^2+2} + \cdots + u_{v^3}, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
v^{n+1} u_{v^n} &> u_{v^n+1} + u_{v^n+2} + \cdots + u_{v^{n+1}},
\end{aligned}
$$

troveremo

$$vV_{n+1} > U_{v^{n+1}+1},$$

e questa formola prova chiaramente che la serie V è divergente insieme alla serie U e che la serie U è convergente insieme alla V.

Esempio 1°. Prendiamo per la serie U la serie armonica

$$1 + \frac{1}{2^\mu} + \frac{1}{3^\mu} + \cdots + \frac{1}{n^\mu} + \cdots ;$$

la serie V sarà rappresentata da

$$1 + \frac{v}{v^\mu} + \frac{v^2}{v^{2\mu}} + \cdots + \frac{v^n}{v^{n\mu}} + \cdots ,$$

e queste due serie saranno convergenti e divergenti insieme. Ma la seconda serie, che equivale a

$$1 + v^{1-\mu} + v^{2(1-\mu)} + \cdots + v^{n(1-\mu)} + \cdots ,$$

è una progressione per quoziente che ha per ragione $v^{1-\mu}$; quindi essa è convergente o divergente secondo che $\mu > 1$ o $\mu \leq 1$. Laonde anche la prima serie sarà convergente per $\mu > 1$, divergente per $\mu \leq 1$.

Il caso di μ numero complesso sarà considerato altrove.

Esempio 2°. Le due serie

$$
\begin{aligned}
&1 + \frac{1}{2(\log 2)^\mu} + \frac{1}{3(\log 3)^\mu} + \cdots , \\
&1 + \frac{v}{v(\log v)^\mu} + \frac{v^2}{v^2(\log v^2)^\mu} + \cdots ,
\end{aligned}
$$

sono contemporaneamente convergenti e divergenti. La seconda

serie si può scrivere

$$1+\frac{1}{(\log v)^{\mu}}+\frac{1}{2^{\mu}(\log v)^{\mu}}+\frac{1}{3^{\mu}(\log v)^{\mu}}+\cdots$$
$$=1+\frac{1}{(\log v)^{\mu}}\left(1+\frac{1}{2^{\mu}}+\frac{1}{3^{\mu}}+\cdots\right);$$

ma la quantità fra parentesi è una serie convergente per $\mu>1$ e divergente per $\mu\leq 1$; dunque anche la prima serie sarà convergente e divergente pei medesimi valori di μ.

92. La serie considerata nel secondo esempio è un caso particolare della seguente

$$S=1+\sum_{k=2}^{k=\infty}\frac{1}{k\log k\log^2 k\log^3 k\ldots\log^{p-1}k\,(\log^p k)^{\mu}},$$

ove $\log^2 k=\log\log k$, $\log^3 k=\log\log\log k$ ec., e la base del sistema dei logaritmi è >2.

Per questa serie ha luogo un teorema analogo al precedente, cioè la serie S è convergente se $\mu>1$ e divergente se $\mu\leq 1$.

Supponiamo che questo teorema sia stato dimostrato per la serie

$$S'=1+\sum_{k=2}^{k=\infty}\frac{1}{k\log k\log^2 k\log^3 k\ldots\log^{p-2}k\,(\log^{p-1}k)^{\mu}};$$

proveremo che esso sussiste altresì per la serie S.

La serie proposta avrà tutti i termini positivi a cominciare dal più piccolo valore di k pel quale si ha $\log^p k>0$; in quel che segue supporremo che la serie S cominci da questo termine. Ciò posto, prendiamo nella serie S il gruppo di 2^n termini,

$$\frac{1}{(2^n+1)\log(2^n+1)\log^2(2^n+1)\ldots[\log^p(2^n+1)]^{\mu}}$$
$$+\;\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+\frac{1}{2^{n+1}\log 2^{n+1}\log^2(2^{n+1})\ldots[\log^p(2^{n+1})]^{\mu}},$$

ove n è un numero tale che $\log^p(2^n)>0$.

I termini di questo gruppo vanno decrescendo a cominciare dal primo, quindi il gruppo è maggiore dell'ultimo termine ripe-

tuto 2^n volte e minore del primo ripetuto 2^n volte, cioè maggiore di

$$\frac{1}{2(n+1)\log 2 \log[(n+1)\log 2]\ldots(\log^{p-1}[(n+1)\log 2])^{\mu}}$$

e a più forte ragione di

$$\frac{1}{2(2n+2)\log(2n+2)\ldots[\log^{p-1}(2n+2)]^{\mu}},$$

poichè $\log 2 < 2$, e minore di

$$\frac{1}{n\log 2\log(n\log 2)\ldots[\log^{p-1}(n\log 2)]^{\mu}}.$$

Se ora nel gruppo dato poniamo per n successivamente $n+1$, $n+2$ ec., e facciamo la somma di tutti i gruppi che si ottengono in tal guisa, troveremo per risultato una serie che differisce dalla serie S per una quantità data; chiamiamo s questa serie. Da quel che precede si ha che s è maggiore di

$$U=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{(2n+2)\log(2n+2)\ldots[\log^{p-1}(2n+2)]^{\mu}}\right.$$
$$\left.+\frac{1}{(2n+4)\log(2n+4)\ldots[\log^{p-1}(2n+4)]^{\mu}}+\text{ec.}\right],$$

e minore di

$$U'=\frac{1}{\log 2}\left[\frac{1}{n\log(n\log 2)\ldots[\log^{p-1}(n\log 2)]^{\mu}}\right.$$
$$\left.+\frac{1}{(n+1)\log((n+1)\log 2)\ldots[\log^{p-1}((n+1)\log 2)]^{\mu}}+\text{ec.}\right].$$

Quindi la serie S è divergente insieme alla serie U ed è convergente insieme alla serie U'.

Ma noi sappiamo che la serie S', e per conseguenza la serie

$$s'=\frac{1}{(2n+2)\log(2n+2)\ldots[\log^{p-1}(2n+2)]^{\mu}}$$
$$+\frac{1}{(2n+3)\log(2n+3)\ldots[\log^{p-1}(2n+3)]^{\mu}}+\text{ec.},$$

è divergente se $\mu \leq 1$ e convergente se $\mu > 1$. Ora osserviamo che

se la serie U è convergente, è convergente altresì la serie

$$\frac{1}{(2n+3)\log(2n+3)\ldots\left[\log^{p-1}(2n+3)\right]^{\mu}}$$
$$+\frac{1}{(2n+5)\log(2n+5)\ldots\left[\log^{p-1}(2n+5)\right]^{\mu}}+\text{ec.},$$

i cui termini sono minori dei termini corrispondenti della serie U; quindi la serie s' è convergente insieme alla serie U. Parimente la serie U è divergente insieme alla serie s'. Laonde la serie S è divergente se $\mu \leq 1$.

Per dimostrare l'altra parte del teorema, osserviamo che il rapporto fra due termini consecutivi della serie U' è

$$\frac{m}{m+1}\cdot\frac{\log(m\log 2)}{\log((m+1)\log 2)}\cdots\left(\frac{\log^{p-1}(m\log 2)}{\log^{p-1}((m+1)\log 2)}\right)^{\mu}$$

Ora è facile provare che

$$\frac{\log^{r}(m\log 2)}{\log^{r}[(m+1)\log 2]}<\frac{\log^{r} m}{\log^{r}(m+1)}.$$

Infatti la base dei logaritmi essendo >2, si ha $\log(m\log 2)<\log m$, e per conseguenza

$$\frac{\log\left(1+\frac{1}{m}\right)}{\log(m\log 2)}>\frac{\log\left(1+\frac{1}{m}\right)}{\log m};$$

aggiungendo 1 ai due membri di questa disuguaglianza si ottiene

$$\frac{\log[(m+1)\log 2]}{\log(m\log 2)}>\frac{\log(m+1)}{\log m}.$$

Indichiamo con α il primo rapporto e con β il secondo; $\log\alpha$ e $\log\beta$ sono quantità positive poichè α e β superano l'unità. Ma

$$\log^{2}(m+1)=\log^{2} m+\log\beta,$$
$$\log^{2}[(m+1)\log 2]=\log^{2}(m\log 2)+\log\alpha,$$

quindi

$$\frac{\log^{2}(m+1)}{\log^{2} m}=1+\frac{\log\beta}{\log^{2} m},\quad\frac{\log^{2}[(m+1)\log 2]}{\log^{2}(m\log 2)}=1+\frac{\log\alpha}{\log^{2}(m\log 2)};$$

e poichè $\log\beta < \log\alpha$ e $\log^2 m > \log^2 (m \log 2)$, si ha

$$\frac{\log^2 [(m+1)\log 2]}{\log^2 (m \log 2)} > \frac{\log^2 (m+1)}{\log^2 m}.$$

Proseguendo in tal guisa si troverà

$$\frac{\log^r [(m+1)\log 2]}{\log^r (m \log 2)} > \frac{\log^r (m+1)}{\log^r m},$$

da cui segue la disuguaglianza che si voleva provare.

Dunque il rapporto fra due termini consecutivi della serie U' è minore dell' espressione

$$\frac{m}{m+1}\,\frac{\log m}{\log (m+1)}\cdot\frac{\log^2 m}{\log^2 (m+1)}\cdots\left(\frac{\log^{p-1} m}{\log^{p-1} (m+1)}\right)^{\mu},$$

che rappresenta il rapporto di due termini consecutivi della serie S'; quindi (90) la serie U' è convergente insieme alla serie S'. Ma la serie S' è convergente se $\mu > 1$; dunque la serie U' e per conseguenza la serie S è convergente se $\mu > 1$.

Il teorema è quindi dimostrato se ha luogo per la serie S'; ma il teorema è stato provato per $p = 1$, dunque è vero in generale.

Serie convergenti indipendentemente dall' ordine dei termini.

93 In una serie convergente si possono riunire più termini consecutivi in un solo senza alterarne il valore; e anche si può decomporre il termine generale nella somma algebrica di più altri, ciascuno dei quali abbia per limite zero. Quest' ultima condizione è necessaria, perchè altrimenti la nuova serie potrebbe essere indeterminata.

Così la serie che ha per termine generale $\frac{1}{2n(2n-1)}$ è convergente, perchè non può essere indeterminata (81) e se indichiamo con s_n la somma dei suoi primi n termini, e facciamo

$$S_n = \frac{1}{1\,.\,2} + \frac{1}{2\,.\,3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)},$$

si vede chiaramente che $s_n < S_n$ e per conseguenza $\lim s_n < 1$

Quindi se osserviamo che

$$\frac{1}{2n(2n-1)} = \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n},$$

e che i due termini del secondo membro convergono entrambi a zero col crescere di n, dall'osservazione precedente risulta che la serie

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} + \cdots,$$

è convergente.

94. Se in una serie convergente si dispongono i termini in ordine differente può accadere che la serie data muti di valore o di natura. Supponiamo infatti che si abbiano due serie U e U' che differiscano solo per l'ordine dei termini, e la prima delle quali sia convergente. Indichiamo con S_n la somma dei primi n termini della serie U, con S'_m la somma dei primi m termini della serie U', e prendiamo per m un numero sufficientemente grande perchè la somma S'_m contenga tutti i termini compresi in S_n. Sieno u_p, u_q, u_r, ... i termini che sono contenuti in S'_m e non in S_n; i numeri $p, q, r, \ldots$ saranno tutti maggiori di n, ed avremo

$$lim\,(S'_m - S_n) = lim\,(u_p + u_q + u_r + \cdots).$$

Ora possono presentarsi tre casi;

1°. $lim\,(u_p + u_q + u_r + \cdots) = 0,$

2°. $lim\,(u_p + u_q + u_r + \cdots) = h,$

3°. $lim\,(u_p + u_q + u_r + \cdots) = \infty.$

ove h è una quantità finita.

Nel primo caso le due serie U e U' hanno lo stesso valore; nel secondo la serie U' è pure convergente, ma ha un valore diverso da quello della serie U; e finalmente nel terzo caso la serie U' è divergente.

Quando si verifica il primo caso si dice che la serie U è convergente indipendentemente dall'ordine dei termini.

Diamo esempi di questi tre casi.

1°. Le due serie

$$S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$$

$$S' = -\frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \cdots,$$

sono entrambe convergenti ed hanno lo stesso valore.

Infatti se poniamo

$$S_{2n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n},$$

$$S'_{2n} = -\frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \cdots - \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n-1},$$

avremo

$$\lim S'_{2n} = \lim S_{2n},$$

e per conseguenza la seconda serie ha lo stesso valore della prima.

2°. Le due serie

$$S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots$$

$$S' = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \cdots,$$

sono entrambe convergenti ma hanno valori differenti.

Facciamo infatti

$$S_{2n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n},$$

$$S'_{3n} = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{4n-3} + \frac{1}{4n-1} - \frac{1}{2n};$$

avremo

$$S'_{3n} - S_{2n} = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+3} + \cdots + \frac{1}{4n-1}.$$

Il secondo membro contenendo n termini sarà compreso fra $\frac{n}{2n+1}$ e $\frac{n}{4n-1}$; quindi il suo limite sarà una quantità finita h, compresa fra $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{4}$, e per conseguenza la seconda serie sarà pure convergente, ma avrà un valore differente da S.

È facile vedere che $h = \frac{1}{2} S$. Infatti si ha

$$S = \sum_{n=1}^{n=\infty} \left(\frac{1}{4n-3} - \frac{1}{4n-2} + \frac{1}{4n-1} - \frac{1}{4n} \right) ,$$

$$S' = \sum_{n=1}^{n=\infty} \left(\frac{1}{4n-3} + \frac{1}{4n-1} - \frac{1}{2n} \right) ,$$

da cui

$$S' - S = \sum_{n=1}^{n=\infty} \left(\frac{1}{4n-2} + \frac{1}{4n} - \frac{1}{2n} \right) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{n=\infty} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} \right) = \frac{1}{2} S,$$

e quindi

$$S' = \frac{3}{2} S.$$

3°. La serie

$$1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \cdots ,$$

è convergente (89) e la serie

$$1 + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{7}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \cdots ,$$

è divergente.

E invero se poniamo

$$S_{2n} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \cdots + \frac{1}{\sqrt{2n-1}} - \frac{1}{\sqrt{2n}},$$

$$S'_m = 1 + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots - \frac{1}{\sqrt{2n-2}} + \frac{1}{\sqrt{4n-3}} + \frac{1}{\sqrt{4n-1}} - \frac{1}{\sqrt{2n}},$$

avremo

$$S'_m - S_{2n} = \frac{1}{\sqrt{2n+1}} + \frac{1}{\sqrt{2n+3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{4n-1}} ,$$

da cui

$$S'_m - S_{2n} > \frac{n}{\sqrt{4n-1}} > \frac{\sqrt{n}}{2} .$$

Ora S_{2n} ha per limite una quantità finita, $\frac{1}{2}\sqrt{n}$ è un numero che cresce indefinitamente con n, dunque S'_m ha per limite l' infinito.

95. Ritornando ora al caso generale, dimostriamo il seguente importante teorema:

La condizione necessaria e sufficiente affinchè una serie sia convergente indipendentemente dall' ordine dei termini è che la serie corrispondente dei moduli sia convergente.

Questa condizione è necessaria; infatti sia

$$U = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots ,$$

una serie convergente indipendentemente dall' ordine dei termini e poniamo $u_n = \alpha_n + \beta_n i$; le due serie reali

$$\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots , \quad \beta_0 + \beta_1 + \beta_2 + \cdots ,$$

saranno convergenti indipendentemente dall' ordine dei loro termini. Quindi dovranno convergere a zero non solo le somme infinite

$$\alpha_n + \alpha_{n+1} + \cdots \quad e \quad \beta_n + \beta_{n+1} + \cdots$$

ma anche le somme parziali formate da termini scelti arbitrariamente nell' una e nell' altra; come per esempio la somma di tutti i termini positivi e quella di tutti i termini negativi.

Laonde le due serie $\alpha_n + \alpha_{n+1} + \cdots$ e $\beta_n + \beta_{n+1} + \cdots$ convergeranno a zero anche se sostituiamo alle quantità α e β i corrispondenti valori assoluti, che indicheremo con α' e β'. Da ciò segue che la somma

$$(\alpha'_n + \beta'_n) + (\alpha'_{n+1} + \beta'_{n+1}) + \cdots$$

avrà per limite zero.

Se ora rappresentiamo con ρ_n il modulo di u_n, avremo

$$\rho_n = \sqrt{\alpha^2_n + \beta^2_n} < \alpha'_n + \beta'_n ,$$

quindi

$$lim(\rho_n + \rho_{n+1} + \cdots) = 0 ,$$

e per conseguenza la serie dei moduli

$$\rho_0 + \rho_1 + \rho_2 + \cdots ,$$

è convergente.

La condizione è sufficiente.

Per una serie convergente a termini positivi la cosa è evidente, poichè in questo caso si ha

$$u_p + u_q + u_r + \cdots < u_{n+1} + u_{n+2} + u_{n+3} + \cdots ;$$

ma il secondo membro ha per limite zero, dunque a più forte ragione il primo membro avrà lo stesso limite.

Supponiamo ora che si abbia

$$u_n = \rho_n (\cos \varphi_n + i \operatorname{sen} \varphi_n),$$

e che la serie

$$\rho_0 + \rho_1 + \rho_2 + \cdots ,$$

sia convergente. Allora la somma

$$\rho_p + \rho_q + \rho_r + \cdots ,$$

dovrà convergere a zero, e quindi a più forte ragione le serie

$$\rho_p \cos \varphi_p + \rho_q \cos \varphi_q + \rho_r \cos \varphi_r + \cdots ,$$
$$\rho_p \operatorname{sen} \varphi_p + \rho_q \operatorname{sen} \varphi_q + \rho_r \operatorname{sen} \varphi_r + \cdots ,$$

e per conseguenza

$$u_p + u_q + u_r + \cdots ,$$

dovranno convergere a zero. Dunque la serie proposta è convergente indipendentemente dall'ordine dei termini. [1]

Serie continue.

96. Si abbia la serie convergente

$$U = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots ,$$

ove $u_0, u_1, u_2, \ldots$, sono funzioni continue di x. La somma U di questa serie sarà in generale una funzione di x, in guisa che potremo fare $U = f(x)$. Per vedere se $f(x)$ è anch'essa una funzione continua di x, bisogna provare, come è noto, che

$$\lim f(x+h) = f(x),$$

per h decrescente.

[1] Dirichlet, *Abhandl. der Berliner Akademie für* 1837.

Per tale oggetto formiamo la funzione

$$f(x+h)=U_0+U_1+U_2+\cdots,$$

indicando con U_0, U_1, U_2, ..., i valori che prendono le funzioni u_0, u_1, u_2, ..., quando ad x si dà l'accrescimento h; e prendiamo h abbastanza piccola perchè la nuova serie sia convergente insieme alla prima.

Se r_n e R_n sono i resti delle due serie, avremo

$$f(x)=u_0+u_1+\cdots+u_{n-1}+r_n,$$
$$f(x+h)=U_0+U_1+\cdots+U_{n-1}+R_n,$$

da cui

$$f(x+h)-f(x)$$
$$=(U_0-u_0)+(U_1-u_1)+\cdots+(U_{n-1}-u_{n-1})+R_n-r_n.$$

Ora dalla convergenza delle due serie segue che per un aumento arbitrariamente piccolo $h=\iota(\cos\omega+i\,\mathrm{sen}\,\omega)$, potremo scegliere per n un numero così grande che le quantità R_n e r_n e la loro differenza R_n-r_n risultino minori di una quantità δ piccola quanto si vuole. Dalla continuità poi delle funzioni u risulta che potremo trovare due quantità Δ e Δ', capaci di divenire arbitrariamente piccole con h, delle quali la prima sia maggiore della più grande e la seconda minore della più piccola delle differenze $U-u$; in guisa che avremo

$$n\Delta'<f(x+h)-f(x)<n\Delta+\delta.$$

Ora conviene avvertire che la grandezza di n dipende dalla piccolezza di δ, e δ dipende da h in virtù della disuguaglianza $R_n-r_n<\delta$. Quindi se determinata n in modo che sia $R_n-r_n<\delta$, possiamo far decrescere h indefinitamente, mantenendo costante n, senza che questa disuguaglianza cessi di essere soddisfatta, è chiaro che $\lim(n\Delta+\delta)=0$, e per conseguenza $f(x)$ sarà una funzione continua. Ma se col diminuire di h questa disuguaglianza non segue ad essere soddisfatta senza crescere indefinitamente n, affinchè la funzione sia continua bisognerà che si abbia $\lim n\Delta=\lim n\Delta'=0$. Se questa condizione non si verifica la funzione è discontinua.

97. Per meglio chiarire il teorema precedente, consideriamo la serie

$$f(x)=\sum_1^{\infty}(-1)^{t-1}\frac{\operatorname{sen} tx}{t},$$

che è convergente per qualunque valore di x (89).

Se facciamo $x=\pi$, $h=-\frac{\pi}{m}$, avremo

$$f\left(\pi-\frac{\pi}{m}\right)-f(\pi)=f\left(\pi-\frac{\pi}{m}\right)=\sum_1^{\infty}\frac{\operatorname{sen}\frac{t\pi}{m}}{t}$$

$$=\sum_{r=1}^{r=m}\sum_{s=0}^{s=\infty}\left[\frac{1}{2sm+r}\operatorname{sen}\frac{(2sm+r)\pi}{m}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{(2s+1)m+r}\operatorname{sen}\frac{((2s+1)m+r)\pi}{m}\right].$$

Ma la quantità fra parentesi è uguale a

$$\frac{m}{(2sm+r)((2s+1)m+r)}\operatorname{sem}\frac{r\pi}{m};$$

quindi

$$f\left(\pi-\frac{\pi}{m}\right)=\sum_{r=1}^{r=m}\operatorname{sen}\frac{r\pi}{m}\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{m}{(2sm+r)((2s+1)m+r)}.$$

Se poniamo

$$S_{rn}=\sum_{s=0}^{s=n}\frac{m}{(2sm+r)((2s+1)m+r)},$$

$$R_{rn}=\sum_{s=n+1}^{s=\infty}\frac{m}{(2sm+r)((2s+1)m+r)},$$

potremo scrivere il valore di $f\left(\pi-\frac{\pi}{m}\right)$ sotto la forma

$$f\left(\pi-\frac{\pi}{m}\right)=\sum_{r=1}^{r=m}S_{rn}\operatorname{sen}\frac{r\pi}{m}+\sum_{r=1}^{r=m}R_{rn}\operatorname{sen}\frac{r\pi}{m}.$$

Prendiamo n in modo che si abbia

$$\sum_{r=1}^{r=m}R_{rn}\operatorname{sen}\frac{r\pi}{m}<\delta;$$

e dinotiamo con Δ e Δ' rispettivamente il massimo ed il minimo fra i termini della somma $\sum_{r=1}^{r=m} S_{rn} \operatorname{sen} \frac{r\pi}{m}$; avremo

$$nm\,\Delta' < f\left(\pi - \frac{\pi}{m}\right) < nm\,\Delta + \delta.$$

Ora è chiaro che se facciamo crescere m, la penultima disuguaglianza continuerà ad essere sodisfatta ancorchè n rimanga costante o anche diminuisca; in guisa che il prodotto nm finirà per crescere indefinitamente con m, poichè n non può divenir minore dell' unità. Quindi non si può affermare nulla rispetto al limite del prodotto $nm\,\Delta'$, e rimane dubbio se il limite di $f\left(\pi - \frac{\pi}{m}\right)$ sia o non sia eguale a zero. È facile poi a dimostrarsi che questo limite è differente da zero. Infatti abbiamo

$$\sum_{r=1}^{r=m} S_{rn} \operatorname{sen} \frac{r\pi}{m} > \sum_{r=1}^{r=m} \frac{m}{r(m+r)} \operatorname{sen} \frac{r\pi}{m} > \sum_{r=1}^{r=\frac{m-\varepsilon}{2}} \frac{\pi}{m+r} \frac{\operatorname{sen} \frac{r\pi}{m}}{\frac{r\pi}{m}},$$

indicando con ε zero o l'unità secondochè m è pari o dispari. Ma

$$\pi \sum_{r=1}^{r=\frac{m-\varepsilon}{2}} \frac{1}{m+r} \frac{\operatorname{sen} \frac{r\pi}{m}}{\frac{r\pi}{m}} > 2 \sum_{r=1}^{r=\frac{m-\varepsilon}{2}} \frac{1}{m+r},$$

poichè per $x \leqq \frac{\pi}{2}$ si ha $\frac{\operatorname{sen} x}{x} \geq \frac{2}{\pi}$; e

$$\sum_{r=1}^{r=\frac{m-\varepsilon}{2}} \frac{1}{m+r} > \frac{m-\varepsilon}{3m-\varepsilon}.$$

Quindi

$$\sum_{r=1}^{r=m} S_{rn} \operatorname{sen} \frac{r\pi}{m} > \frac{m-\varepsilon}{3m-\varepsilon} > 0;$$

dunque

$$\lim \left[f\left(\pi - \frac{\pi}{m}\right) - f(\pi) \right] > 0,$$

e la funzione è discontinua, come volevasi dimostrare [1].

---

[1] Cauchy (*Cours d'Analyse*, pag. 131) affermò la continuità della

Addizione, Moltiplicazione e Divisione delle Serie.

98. *Se due serie che hanno per termine generale rispettivamente* u_n *e* v_n *sono convergenti, sarà pure convergente la serie che ha per termine generale* $u_n \pm v_n$.

Infatti se facciamo

$$U_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n\,,$$
$$V_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n\,;$$

avremo

$$U_n \pm V_n = (u_0 \pm v_0) + (u_1 \pm v_1) + \dots + (u_n \pm v_n).$$

Le quantità U_n e V_n convergono verso limiti finiti e determinati al crescere di n, quindi anche la loro somma algebrica e per conseguenza il secondo membro dell'ultima formola convergerà verso un limite finito e determinato al crescere di n. Dunque la serie che ha per termine generale $u_n \pm v_n$ è convergente.

La serie $\Sigma(u_n \pm v_n)$ si chiama la *somma algebrica* delle due serie Σu_n e Σv_n; e dal teorema precedente apparisce chiaro che la serie $\Sigma(u_n \pm v_n)$ ha per valore la somma algebrica dei valori delle due serie date.

Questo teorema sussiste evidentemente altresì per le serie complesse.

99. *Se due serie che hanno per termine generale rispettivamente* u_n *e* v_n *sono convergenti indipendentemente dall'ordine dei loro termini, sarà pure convergente al modo stesso la serie che ha per termine generale*

$$w_n = u_n v_0 + u_{n-1} v_1 + \dots + u_1 v_{n-1} + u_0 v_n\,.$$

---

serie U in generale senza sottoporla ad alcuna restrizione. — Abel, nella sua *Memoria sulla Serie binomiale* avvertì pel primo l'errore del geometra francese, portando per esempio la serie che abbiamo considerata nel n° 97. Gli sviluppi però che accompagnano questo esempio ci sono stati comunicati dal Prof. Betti.

Facciamo

$$U_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n ,$$
$$V_n = v_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_n ,$$
$$W_n = w_0 + w_1 + w_2 + \cdots + w_n ,$$

e indichiamo con U, V, W i limiti rispettivi di U_n, V_n, W_n; avremo

$$\begin{aligned} W_{2n} = &(u_0 v_0) + (u_1 v_0 + u_0 v_1) + \cdots \\ &+ (u_n v_1 + \cdots + u_1 v_n) + u_{n+1} v_0 + u_0 v_{n+1} \\ &+ (u_n v_2 + \cdots + u_2 v_n) + u_{n+2} v_0 + u_{n+1} v_1 + u_1 v_{n+1} + u_0 v_{n+2} \\ &+ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ &+ (u_n v_{n-1} + u_{n-1} v_n) + u_{2n-1} v_0 + \cdots + u_{n+1} v_{n-2} + u_{n-2} v_{n+1} + \cdots + u_0 v_{2n-1} \\ &+ (u_n v_n) + u_{2n} v_0 + \cdots + u_{n+1} v_{n-1} + u_{n-1} v_{n+1} + \cdots + u_0 v_{2n} \end{aligned}$$

Ora la somma di tutte le quantità fra parentesi è per l'appunto il valore di $U_n V_n$; quindi la formola precedente potrà scriversi

$$\begin{aligned} W_{2n} = U_n V_n &+ U_0 v_{2n} + U_1 v_{2n-1} + \cdots + U_{n-1} v_{n+1} \\ &+ V_0 u_{2n} + V_1 u_{2n-1} + \cdots + V_{n-1} u_{n+1} ; \end{aligned}$$

o passando ai limiti

$$\begin{aligned} \lim W_{2n} = U V &+ \lim (U_0 v_{2n} + U_1 v_{2n-1} + \cdots + U_{n-1} v_{n+1}) \\ &+ \lim (V_0 u_{2n} + V_1 u_{2n-1} + \cdots + V_{n-1} u_{n+1}). \end{aligned}$$

Sieno u'_n il modulo di u_n e v'_n quello di v_n; e poniamo

$$U'_n = u'_0 + u'_1 + \cdots + u'_n , \qquad V'_n = v'_0 + v'_1 + \cdots + v'_n .$$

Rappresentando con U' e V' i limiti rispettivi di U'_n e V'_n, avremo $U'_n < U'$ e $V'_n < V'$. Inoltre si ha

$$\begin{aligned} (U_0 v_{2n} + U_1 v_{2n-1} + \cdots + U_{n-1} v_{n+1} &\leq U'_0 v'_{2n} + U'_1 v'_{2n-1} + \cdots + U'_{n-1} v'_{n+1} \\ &< U' (v'_{n+1} + v'_{n+2} + \cdots + v'_{2n}) \\ &< U' (V' - V'_n) ; \end{aligned}$$

quindi

$$lim(U_0 v_{2n} + U_1 v_{2n-1} + \cdots + U_{n-1} v_{n+1}) = 0.$$

Al modo stesso si dimostra che

$$lim(V_0 u_{2n} + V_1 u_{2n-1} + \cdots + V_{n-1} u_{n+1}) = 0;$$

dunque la serie W è convergente.

Se finalmente osserviamo che la serie che ha per termine generale $u'_n v'_0 + \cdots + u'_0 v'_n$ è convergente, e che questa espressione per un noto teorema è uguale o superiore al modulo di w_n, si vede chiaramente che la serie dei moduli corrispondente alla serie W è convergente. Quindi la serie W è convergente indipendentemente dall'ordine dei termini.

La serie W si chiama *prodotto* delle serie U e V e si ha

$$W = U V. \text{ (¹)}$$

(¹) Se dalle due serie

$$U = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots, \qquad V = v_0 + v_1 + v_2 + \cdots,$$

ne deduciamo un'altra

$$W = w_0 + w_1 + w_2 + \cdots,$$

ove $w_n = u_n v_n$, la serie W è convergente insieme alle serie U e V (88). Ora si ha

$$u_0 v_0 = u_0 v_0$$
$$u_1 v_1 = u_1 (v_0 + v_1) - u_1 v_0$$
$$u_2 v_2 = u_2 (v_0 + v_1 + v_2) - u_2 (v_0 + v_1)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$u_n v_n = u_n (v_0 + v_1 + \cdots + v_n) - u_n (v_0 + v_1 + \cdots + v_{n-1}),$$

da cui

$$\begin{aligned} & u_0 v_0 + u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n \\ = & (u_0 - u_1) v_0 + (u_1 - u_2)(v_0 + v_1) + (u_2 - u_3)(v_0 + v_1 + v_2) + \cdots \\ & + (u_{n-1} - u_n)(v_0 + v_1 + \cdots + v_{n-1}) \\ & + u_n (v_0 + v_1 + \cdots + v_n). \end{aligned}$$

Se al secondo membro aggiungiamo e togliamo $u_{n+1}(v_0 + v_1 + \dots + v_n)$, e facciamo

$$W_n = u_0 v_0 + u_1 v_1 + \cdots + u_n v_n$$
$$V_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n,$$

100. Quel che abbiamo detto per due serie è evidentemente applicabile ad un numero qualunque di serie; cioè se abbiamo m serie

$$\begin{array}{l} a_0\,,\ a_1\,,\ a_2\,,\ a_3\,,\ \dots\,,\\ b_0\,,\ b_1\,,\ b_2\,,\ b_3\,,\ \dots\,,\\ c_0\,,\ c_1\,,\ c_2\,,\ c_3\,,\ \dots\,,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\,, \end{array}$$

che sono convergenti indipendentemente dall' ordine dei termini e se indichiamo con

$$A_0\,,\ A_1\,,\ A_2\,,\ A_3\,,\ \dots\,,$$

una nuova serie nella quale il termine generale A_n si ottiene sommando tutti i gruppi possibili che si posson formare con le lettere a, b, c, ec., in modo che ciascun gruppo contenga m fattori, uno preso nella prima serie, uno nella seconda, ..., uno nella

---

avremo

$$W_n = u_{n+1} V_n - \sum_{r=0}^{r=n} (u_{r+1} - u_r) V_r\,.$$

Al modo stesso si trova

$$W'_n = v_{n+1} U_n - \sum_{r=0}^{r=n} (v_{r+1} - v_r) U_r\,.$$

Poniamo $u_n = n+1$, $v_n = 1$; avremo $W'_n = \sum_0^n (r+1)$, $V_n = n+1$, e per conseguenza

$$\sum_0^n (r+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2};$$

se $u_n = n+2$, $v_n = n+1$, avremo

$$\sum_0^n (r+1)(r+2) = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{2} - \sum_0^n \frac{(r+1)(r+2)}{2}\,,$$

da cui

$$\sum_0^n (r+1)(r+2) = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3};$$

in generale si trova

$$\sum_0^n (r+1)(r+2)\dots(r+m) = \frac{(n+1)(n+2)\dots(n+m+1)}{m+1}\,.$$

serie *emmesima*, scelti in tal guisa che la somma degl' indici in ciascun gruppo sia n; la serie delle A è altresì convergente indipendentemente dall' ordine dei suoi termini, e il suo valore è uguale al prodotto delle somme delle serie date.

101. Date tre serie

$$U = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots$$
$$V = v_0 + v_1 + v_2 + \cdots$$
$$W = w_0 + w_1 + w_2 + \cdots$$

i cui termini sono legati dalla relazione

$$v_0 w_n + v_1 w_{n-1} + \cdots + w_1 v_{n-1} + w_0 v_n = u_n ,$$

abbiamo dimostrato che se le serie V e W sono convergenti indipendentemente dall' ordine dei termini, anche la serie U è convergente al modo stesso. In questa ipotesi la serie W si dice *quoziente* della divisione della serie U per la serie V e si ha

$$\frac{U}{V} = W.$$

La formola

$$w_n = \frac{u_n - v_n w_0 - v_{n-1} w_1 - \cdots - v_1 w_{n-1}}{v_0} ,$$

serve per determinare successivamente i coefficienti della serie W; infatti osservando che $w_0 = \frac{u_0}{v_0}$, si trova

$$w_1 = \frac{u_1 - v_1 w_0}{v_0} = \frac{u_1 v_0 - v_1 u_0}{v_0^2}$$
$$w_2 = \frac{u_2 - v_2 w_0 - v_1 w_1}{v_0} = \frac{u_2 v_0^2 - u_0 v_0 v_2 - u\ v_0 v_1 + u_0 v_1^2}{v_0^2} ,$$

ec.

La teoria delle combinazioni dà il modo di trovare w_n indipendentemente dai termini precedenti, come può vedersi nell' Opera già citata di Thibaut e nell' *Analisi algebrica* di Stern; ma nello stato attuale della scienza è preferibile giovarsi per tale oggetto della teoria dei determinanti, come mostreremo nella seconda Parte.

Potenza di una Serie.

102. Se nel teorema del n° 106 supponiamo che le m serie date sieno tutte identiche fra di loro, cioè che si abbia

$$a_0 = b_0 = c_0 = \cdots , \quad a_1 = b_1 = c_1 = \cdots , \quad \text{ec.},$$

la serie che ha per termine generale A_n si chiama la *potenza m^{esima}* della serie Σa_n. Quindi da ciò che precede si deduce che *la potenza* m^{esima}, *ove* m *è numero intero e positivo, di una serie convergente indipendentemente dall' ordine dei termini, è un' altra serie convergente al modo stesso e che ha per somma la potenza* m^{esima} *della somma della serie proposta.*

103. Se supponiamo che la serie proposta abbia la forma

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots ,$$

è facile vedere che nella serie

$$A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \cdots ,$$

potenza m^{esima} della precedente, un coefficiente qualunque A_n rappresenta per l'appunto la somma delle disposizioni con ripetizione delle lettere a_0, a_1, a_2, ..., combinate m a m corrispondenti alla data somma n; cioè che si ha

$$A_n = D_{n,m} .$$

Quindi per la formola (5) del Capitolo primo, avremo

$$A_n = \frac{1}{n a_0} \left[(m + 1 - n) a_1 A_{n-1} + (2(m+1) - n) a_2 A_{n-2} + \cdots \right.$$
$$\left. + (n(m+1) - n) a_n A_0 \right] ,$$

e poichè $A_0 = a_0^m$, troveremo facilmente

$$(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \cdots)^m = a_0^m$$
$$+ m a_0^{m-1} a_1 x + [m a_0^{m-1} a_2 + m_2 a_0^{m-2} a_1^2] x^2$$
$$+ [m a_0^{m-1} a_3 + m_2 a_0^{m-2} . 2a_1 a_2 + m_3 a_0^{m-3} a_1^3] x^3$$
$$+ [m a_0^{m-1} a_4 + m_2 a_0^{m-2} (2a_1 a_3 + a_2^2) + m_3 a_0^{m-3} . 3a_1^2 a_2$$
$$+ m_4 a_0^{m-4} a_1^4] x^4$$
$$+ [m a_0^{m-1} a_5 + m_2 a_0^{m-2} (2a_1 a_4 + 2a_2 a_3) + m_3 a_0^{m-3} (3a_1^2 a_3 + 3a_1 a_2^2$$
$$+ m_4 a_0^{m-4} . 4a_1^3 a_2 + m_5 a_0^{m-5} a_1^5] x^5 + \text{ec.},$$

ove abbiamo fatto per brevità

$$m_n = \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{1.2.\dots n}.$$

104. Il valore di A_n è altresì dato dalla formola

$$A_n = \Sigma \frac{\Pi m\, a_0^\alpha a_1^\beta a_2^\gamma \dots}{\Pi\alpha\, \Pi\beta\, \Pi\gamma \dots},$$

ove il segno Σ si estende a tutte le soluzioni intere e positive dell' equazioni $\alpha+\beta+\gamma+\dots=m$ e $\beta+2\gamma+\dots=n$, come si deduce facilmente da ciò che abbiamo detto nel n° 18.

Se a_0 è uguale a zero, dall' ultima formola apparisce chiaro che i coefficienti $A_0, A_1, A_2, \dots, A_{m-1}$ sono tutti eguali a zero; in guisa che la serie che dà la potenza m^{esima} di

$$a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + \dots,$$

sarà rappresentata da

$$A_m + A_{m+1} x + A_{m+2} x^2 + \dots$$

105. Come caso particolare delle formole precedenti si ottiene lo sviluppo della potenza m^{esima} del binomio $1+x$, facendo

$$a_0 = a_1 = 1, \quad \text{e} \quad a_2 = a_3 = \dots = 0.$$

Con queste supposizioni il valore di A_n diventa

$$A_n = \frac{\Pi\; m}{\Pi n\, \Pi(m-n)},$$

ovvero

$$A_n = \frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)}{1.2.3\dots n};$$

ma il secondo membro di questa formola rappresenta il numero delle combinazioni senza ripetizioni di m elementi presi n a n, che abbiamo indicato con m_n; quindi avremo

$$(1+x)^m = \sum_{n=0}^{n=m} m_n x^n.$$

Moltiplicando i due membri di questa eguaglianza per a^m e

facendo $ax = b$, troveremo

$$(a+b)^m = \sum_{n=0}^{n=m} m_n a^{m-n} b^n .$$

Serie i cui termini convergono verso limiti determinati.

106. *Se fra i termini di due serie convergenti*

$$U = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots$$
$$V = v_0 + v_1 + v_2 + \cdots$$

si ha la relazione

$$v_n = \lim u_n ,$$

si avrà altresì

$$V = \lim U.$$

Infatti poniamo $u_n = v_n + \delta_n$, ove δ_n è una quantità che converge a zero; la serie

$$\Delta = \delta_0 + \delta_1 + \delta_2 + \cdots$$

è convergente perchè differenza delle due serie convergenti U e V.

Sommando le due serie V e Δ si ottiene

$$U = V + \Delta.$$

Facciamo convergere le quantità $\delta_0, \delta_1, \delta_2, \ldots,$ verso zero, e indichiamo con

$$\Delta' = \delta'_0 + \delta'_1 + \delta'_2 + \cdots ,$$

il nuovo valore che prende Δ. Se supponiamo che si abbia

$$\delta'_0 < \frac{\delta_0}{h} , \quad \delta'_1 < \frac{\delta_1}{h} , \quad \delta'_2 < \frac{\delta_2}{h} \cdots ,$$

ove h è un numero arbitrario, avremo

$$\Delta' < \frac{\Delta}{h} .$$

Se ora facciamo crescere indefinitamente h, Δ' convergerà verso zero poichè Δ è una quantità finita. Dunque facendo con-

vergere i termini della serie U verso i loro rispettivi limiti, Δ convergerà a zero, e per conseguenza

$$lim\, U = V,$$

come volevasi dimostrare.

Serie che procedono secondo le potenze ascendenti di una variabile.

107. Le serie che più frequentemente si presentano nell'Analisi sono ordinate secondo le potenze ascendenti e positive di una variabile, cioè sono della forma

$$U = u_0 + u_1 x + u_2 x^2 + \cdots$$

Queste serie possono essere convergenti indipendentemente da x o per tutti i valori di x che sono compresi fra limiti determinati. Così nel n° 84 abbiamo dimostrato che la progressione geometrica

$$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$$

è convergente per tutti i valori di $x < 1$, divergente per $x \geq 1$ indeterminata per $x = -1$.

Dimostriamo varie proprietà importanti delle serie U e che ci torneranno utili in seguito.

108. *Data la serie*

$$U = u_0 + u_1 x + u_2 x^2 + \cdots ,$$

se per un valore di x *il cui modulo è* ρ, *i moduli dei termini della serie non aumentano indefinitamente, la serie è convergente indipendentemente dall'ordine dei termini per tutti i valori di* x *il cui modulo è minore di* ρ.

Per dimostrare questo teorema basta provare che indicando con s_n il modulo di u_n e con $r < \rho$ il modulo di un valore di x, la serie

$$s_0 + s_1 r + s_2 r^2 + \cdots ,$$

è convergente.

Se rappresentiamo con R_n il resto di questa serie, è mani·

festo che potremo scrivere il valore di R_n nel seguente modo

$$R_n = s_n \rho^n \left(\frac{r}{\rho}\right)^n + s_{n+1} \rho^{n+1} \left(\frac{r}{\rho}\right)^{n+1} + \cdots$$

Ora per l'ipotesi fatta, le quantità $s^n \rho^n$, $s_{n+1} \rho^{n+1}$, ..., non possono crescere indefinitamente con n, ma si debbono mantenere sempre minori di una quantità arbitraria e finita A; quindi avremo

$$R_n < A \left(\frac{r}{\rho}\right)^n \left[1 + \frac{r}{\rho} + \frac{r^2}{\rho^2} + \cdots\right],$$

ovvero

$$R_n < A \left(\frac{r}{\rho}\right)^n \frac{1}{1 - \frac{r}{\rho}},$$

da cui

$$\lim R_n = 0 \ (^1)$$

109. Se indichiamo con ρ il più grande modulo di x pel quale i moduli dei termini della serie U non aumentano all'infinito, e se dall'origine come centro e con un raggio eguale a ρ descriviamo un cerchio, è chiaro che la serie U è convergente indipendentemente dall'ordine dei termini per tutti i valori di x situati nell'interno di questo cerchio; divergente per tutti i punti esterni; e sulla circonferenza potrà essere convergente, divergente o indeterminata. A questo cerchio è stato dato il nome di *cerchio di convergenza*. — (Vedi Briot et Bouquet, *Théorie de fonc. doubl. périodiques*, pag. 13)

110. Il teorema precedente sussiste altresì per le serie che contengono al tempo stesso le potenze positive e negative di x e che si possono rappresentare con $\sum_{-\infty}^{\infty} u_n x^n$. Cominciamo dall'avvertire che la somma di una serie di questa forma si considera come il limite al quale tende la somma finita $\sum_{n=-r}^{n=r} u_n x^n$ al crescere di r. Ciò posto si ha il teorema:

Se per due valori $x_0 = r_0 (\cos \varphi_0 + i \operatorname{sen} \varphi_0)$,

---

(1) Abel, *Untersuchungen über die Reihe*, ec. (*Crelle's Journal*, tom. I, pag. 314); Cauchy, *Nouveaux Exercices*, tom. III, pag. 388.

$x_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i \operatorname{sen}\varphi_1)$ *i moduli dei termini della serie* $\sum_{-\infty}^{\infty} u_n x^n$ *non crescono indefinitamente, le tre serie*

$$\sum_{-\infty}^{\infty} u_n x^n\ ,\quad \sum_{0}^{\infty} u_n x^n\ ,\quad \sum_{0}^{\infty} u_{-n} x^{-n}\ ,$$

sono convergenti indipendentemente dall' ordine dei termini per $x = r(\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi)$, *tutte le volte che* r *è compreso fra* r_0 *e* r_1.

Infatti come nel numero precedente si trova

$$s_n r^n + s_{n+1} r^{n+1} + \cdots$$

$$= \left(\frac{r}{r_1}\right)^n \left[s_n r_1^n + s_{n+1} r_1^{n+1} \frac{r}{r_1} + s_{n+2} r_1^{n+2} \left(\frac{r}{r_1}\right)^2 + \cdots\right] < \delta,$$

$$s_{-n} r^{-n} + s_{-n-1} r^{-n-1} + \cdots$$

$$= \left(\frac{r_0}{r}\right)^n \left[s_{-n} r_0^{-n} + s_{-n-1} r_0^{-n-1} \frac{r_0}{r} + s_{-n-2} r_0^{-n-2} \left(\frac{r_0}{r}\right)^2 + \cdots\right] < \delta.$$

ove $s_{\pm n}$ è il modulo di $u_{\pm n}$.

111. *La serie*

$$U = u_0 + u_1 x + u_2 x^2 + \cdots = f(x)\ ,$$

è una funzione continua di x *nell' interno del cerchio di convergenza.*

Per dimostrare questo teorema bisogna formare $f(x+h)$, ove $h = \iota(\cos\omega + i \operatorname{sen}\omega)$ e provare che per h decrescente la differenza $f(x+h) - f(x)$ si può rendere minore di qualunque quantità data. A tal fine poichè $x = r(\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi)$ ove $r < \rho$, dipende dalle due quantità r e φ, è necessario considerare successivamente gl' incrementi h_r e h_φ di r e di φ rispettivamente.

La serie U essendo convergente indipendentemente dall' ordine dei suoi termini nell' interno del cerchio di convergenza, potremo cominciare dal considerare la serie dei moduli

$$s_0 + s_1 r + s_2 r^2 + \cdots$$

Indichiamo con R_n il resto di questa serie e con R'_n il valore che acquista R_n facendo subire ad r l'incremento $\pm h_r$, in guisa che si abbia

$$R_n = s_n r^n + s_{n+1} r^{n+1} + \cdots\ ,$$
$$R'_n = s_n (r \pm h_r)^n + s_{n+1} (r \pm h_r)^{n+1} + \cdots$$

Poichè è sempre possibile prendere h_r in modo che sia $0 < r \pm h_r < \rho$, le due serie che hanno per resti R_n e R'_n sono convergenti; quindi potremo scegliere n così grande che si abbia $R'_n - R_n < \delta$, essendo δ una quantità arbitrariamente piccola. Ora è manifesto che questa condizione sarà soddisfatta per gli stessi valori di n e di δ anche se si lascia decrescere indefinitamente h_r; laonde (96) la serie

$$s_0 + s_1 r + s_2 r^2 + \cdots ,$$

è una funzione continua per qualunque cangiamento reale di r.

Ma il termine generale della serie U è dato da

$$u_n x^n = s_n r^n \left[\cos(n\varphi + \theta_n) + i \operatorname{sen}(n\varphi + \theta_n)\right] ,$$

ed è evidente che il fattore fra parentesi non può avere alcuna influenza sulla disuguaglianza $R'_n - R_n < \delta$.

Se ora facciamo variare φ di $\pm h_\varphi$, e osserviamo che

$$u_n r^n \left[\cos(n\varphi \pm nh_\varphi) + i \operatorname{sen}(n\varphi \pm nh_\varphi)\right]$$
$$= u_n x^n \left[\cos(\pm nh_\varphi) + i \operatorname{sen}(\pm nh_\varphi)\right] ,$$

è chiaro che la quantità

$$u_n x^n \left[\cos(\pm nh_\varphi) + i \operatorname{sen}(\pm nh_\varphi)\right]$$
$$+ u_{n+1} x^{n+1} \left[\cos \pm (n+1) h_\varphi + i \operatorname{sen} \pm (n+1) h_\varphi\right] + \cdots ,$$

si potrà rendere minore di δ indipendentemente dalla grandezza di h_φ, per gli stessi valori di n e di δ pei quali si ha $R'_n < \delta$. Dunque il teorema è dimostrato in generale.

112. *Se le due serie*

$$U = u_0 + u_1 x + u_2 x^2 + \cdots ,$$
$$V = v_0 + v_1 x + v_2 x^2 + \cdots ,$$

sono convergenti nel cerchio di convergenza di raggio ρ, *e sono eguali per tutti i valori di* x *che hanno i loro indici sopra una linea* l *di lunghezza finita piccola quanto si vuole, i cui punti estremi sieno indici di* $x_0 = r_0 (\cos \varphi_0 + i \operatorname{sen} \varphi_0)$ *e di* $x_1 = r_1 (\cos \varphi_1 + i \operatorname{sen} \varphi_1)$; *tutti i coefficienti della serie* U *saranno identicamente eguali a quelli corrispondenti della serie* V, *ossia i valori delle due serie si manterranno eguali in tutto il cerchio di convergenza.*

Consideriamo prima il caso in cui uno dei punti estremi della linea sia all'origine, cioè che si abbia $r_0 = 0$. Allora posto $x = 0$, avremo $u_0 = v_0$ e

$$x(u_1 + u_2 x + u_3 x^2 + \cdots) = x(v_1 + v_2 x + v_3 x^2 + \cdots),$$

Se in questa equazione facciamo $x = 0$ non otterremo nuovi risultati; ma poichè l'eguaglianza sussiste anche per valori di $r < r_1$ diversi da zero, potremo sopprimere il fattore x e nell'equazione

$$u_1 + u_2 x + u_3 x^2 + \cdots = v_1 + v_2 x + v_3 x^2 + \cdots ,$$

potremo dare ad x un valore complesso δ arbitrariamente piccolo; allora l'espressioni

$$u_2 x + u_3 x^2 + \cdots = \delta(u_2 + u_3 x + \cdots) = \delta_1 ,$$
$$v_2 x + v_3 x^2 + \cdots = \delta(v_2 + v_3 x + \cdots) = \delta_2 ,$$

potranno divenire piccole quanto si vuole, in guisa che dall'equazione

$$u_1 + \delta_1 = v_1 + \delta_2 ,$$

si deduce

$$u_1 - v_1 < \delta_2 - \delta_1 \qquad \text{ovvero} \qquad u_1 = v_1 .$$

Ragionando in un modo analogo sull'equazione

$$x^2 (u_2 + u_3 x + \cdots) = x^2 (v_2 + v_3 x + \cdots),$$

troveremo $u_2 = v_2$ e via discorrendo.

Supponiamo ora che ambedue i punti estremi della linea l non sieno nell'origine, cioè che si abbia

$$0 < r_0 < r_1 < \rho$$

e poniamo

$$x = x_0 + y.$$

Le serie U e V essendo convergenti indipendentemente dall'ordine dei termini per $r < \rho$, ne segue che le serie

$$s_0 + s_1 r + s_2 r^2 + \cdots ,$$
$$t_0 + t_1 r + t_2 r^2 + \cdots ,$$

ove le quantità s e t sono i moduli rispettivi dei coefficienti u e v, saranno convergenti. Laonde indicando con β il modulo di y, le due serie

$$s_0 + s_1(r_0+\beta) + s_2(r_0+\beta)^2 + \cdots ,$$
$$t_0 + t_1(r_0+\beta) + t_2(r_0+\beta)^2 + \cdots ,$$

saranno altresì convergenti se è soddisfatta la condizione

$$r_0+\beta<\rho , \quad \text{ovvero} \quad \beta<\rho-r_0 .$$

Dunque quando è soddisfatta questa condizione, nel qual caso è soddisfatta altresì la condizione $r<\rho$ poichè si ha $r<r_0+\beta$, le due serie

$$U=\Sigma_n u_n x^n = \Sigma_n \Sigma_m n_m u_n x_0^{n-m} y^m ,$$
$$V=\Sigma_n v_n x^n = \Sigma_n \Sigma_m n_m v_n x_0^{n-m} y^m ,$$

sono convergenti indipendentemente dall'ordine dei termini, in guisa che ordinandole rispetto alle potenze ascendenti di y, avremo

$$U=u_0+u_1x+u_2x^2+\cdots = a_0+a_1y+a_2y^2+\cdots ,$$
$$V=v_0+v_1x+v_2x^2+\cdots = b_0+b_1y+b_2y^2+\cdots ,$$

Ora quando l'indice di x percorre la linea l dall'indice di x_0 all'indice di x_1, la quantità y varia da 0 a x_1-x_0, e il suo modulo da 0 a $y_0 = mod(x_1-x_0)$; ove bisogna avvertire che y_0 è differente da zero perchè è uguale alla distanza tra gli estremi della linea l che è di lunghezza finita. Dunque nell'intervallo

$$0<mod\, y<y_0 ,$$

si ha

$$a_0+a_1y+a_2y^2+\cdots = b_0+b_1y+b_2y^2+\cdots ,$$

e per conseguenza i coefficienti a e b sono rispettivamente eguali. Da ciò segue che l'ultima eguaglianza sussiste per tutti i valori di y pei quali le due serie sono convergenti, cioè per tutti i valori di $\beta<\rho-r_0$; dunque l'eguaglianza $U=V$ deve sussistere per tutti i valori di x che soddisfanno a questa condizione.

Ora si ha (31)

$$\beta = mod(x-x_0) = \sqrt{r^2-2rr_0\cos(\varphi-\varphi_0)+r_0^2} ;$$

quindi la condizione $\beta < \rho - r_0$ diventa

$$r^2 - 2\, r\, r_0 \cos(\varphi - \varphi_0) < \rho^2 - 2\, \rho\, r_0 \, .$$

Posto $\varphi = \varphi_0$ e $2r_0 - \rho = r_0'$, l'equazione

$$r^2 - 2\, r\, r_0 + \rho\, r_0' = 0 \, ,$$

ha per radici ρ e r_0'; quindi la disuguaglianza $r^2 - 2 r r_0 + \rho\, r_0' < 0$ è soddisfatta da tutti i valori di r compresi fra ρ e r_0'. Se $r_0' < 0$, allora in questo intervallo essendovi compreso il valore 0, i coefficienti delle due serie U e V sono identici. Giova osservare che in questa ipotesi la disuguaglianza data è soddisfatta da $r = 0$ indipendentemente dal valore di φ. Se $r_0' > 0$, faremo $x_0' = r_0' (\cos \varphi_0 + i \operatorname{sen} \varphi_0)$, e l'equazione $U = V$ sussisterà per tutti i valori di x compresi fra x_0' e x_1.

Se facciamo $x = x_0' + y'$ e ordiniamo le serie U e V secondo le potenze di y', ragionando come innanzi vedremo che l'equazione $U = V$ sussisterà nell'intervallo $x_0'' < x < x_1$, ove

$$\operatorname{mod} x_0'' = r_0'' = 2 r_0' - \rho = 4 r_0 - 3\rho.$$

Se questo valore è minore di 0, il teorema è dimostrato, altrimenti continueremo in questo modo sino a che arriveremo ad un valore $r_0^{(n)}$ pel quale sia

$$2 r_0^{(n)} - \rho = 2 n r_0 - (2n - 1)\rho < 0 \, ;$$

e si otterrà sempre un tal valore, purchè sia $r_0 < \rho$, cioè purchè i punti estremi non sieno ambedue situati sopra la circonferenza del cerchio di convergenza.

Un teorema analogo al precedente ha luogo per l'eguaglianza $\sum_{-\infty}^{\infty} u_n x^n = \sum_{-\infty}^{\infty} v_n x^n$; ma per tale argomento rimandiamo alla Memoria di Scheibner: *Ueber Unendliche Reihen*, pag. 20.

Serie ricorrenti.

113. Una serie

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots \, .$$

ordinata secondo le potenze ascendenti della variabile x, si dice *ricorrente e dell'ordine* m^{esimo} se il coefficiente di una potenza qualunque della variabile si esprime in funzione lineare di m coefficienti delle potenze inferiori, cioè se si ha

$$A_0 a_{n+m} + A_1 a_{n+m-1} + \cdots + A_m a_n = 0 ,$$

ove

$$A_1, A_2, \cdots A_m \quad ,$$

sono costanti determinate.

Le quantità

$$-\frac{A_1}{A_0}, \quad -\frac{A_2}{A_0}, \quad \cdots \quad -\frac{A_m}{A_0},$$

per le quali bisogna moltiplicare i coefficienti precedenti per ottenere quello che si cerca, compongono la *scala di relazione*.

Esempii. 1°. La serie

$$1 + 2x + 3x^2 + \cdots + (n+1)x^n + \cdots ,$$

è ricorrente e di second'ordine, poichè fatto $a_n = n+1$, avremo $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$; la scala di relazione è formata dalle quantità 2 e -1.

2°. La serie

$$1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 6x^4 + 11x^5 + 22x^6 + \cdots$$

è ricorrente e di terzo ordine, poichè si ha $a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2} - 2a_{n-3}$; la scala di relazione è formata dai numeri 2, 1 e -2.

CAPITOLO V.

CONVERGENZA DELLE SERIE.

Serie a termini positivi.

114. *Una serie è convergente se a cominciare da un certo termine, il rapporto di un termine qualunque al precedente è sempre minore di un numero dato più piccolo dell'unità; ed è divergente se questo rapporto è maggiore dell'unità.*

La progressione geometrica

$$1+x+x^2+\cdots,$$

è convergente per $x<1$ e divergente per $x\geq 1$; quindi (90), la serie

$$u_1+u_2+u_3+\cdots,$$

è convergente se, a cominciare da un certo valore di n, si ha $\frac{u_{n+1}}{u_n}<x<1$, ed è divergente se si ha $\frac{u_{n+1}}{u_n}>1$.

Se k è il limite di $\frac{u_{n+1}}{u_n}$, potremo scrivere

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=k\pm\alpha,$$

essendo α una quantità che va a zero quando n cresce indefinitamente. Se $k<1$, potremo sempre trovare un valore di n tale che si abbia $\alpha<1-k$, da cui $k+\alpha<1$. Quindi sarà sempre possibile dare ad n un tal valore che il rapporto $\frac{u_{n+1}}{u_n}=k+\alpha$ sia minore di 1. Se $k>1$, vi sarà un valore di n pel quale $\alpha<k-1$, da cui $k-\alpha>1$; quindi per $k>1$ potremo sempre prendere per n un tal numero che il rapporto $\frac{u_{n+1}}{u_n}=k-\alpha$

sia maggiore di 1. Laonde il teorema precedente potrà enunciarsi altresì nel seguente modo:

La serie Σu_n *è convergente o divergente secondochè* $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n}$ *è minore o maggiore dell' unità.*

Avvertiamo però che il primo enunciato è più generale del secondo, poichè può accadere che il rapporto $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ non abbia un limite determinato; ma questo caso si presenta assai raramente.

115. Se h è un numero minore dell'unità e se si ha

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < h, \quad \frac{u_{n+2}}{u_{n+1}} < h, \quad \frac{u_{n+3}}{u_{n+2}} < h, \quad \ldots\ ,$$

da cui

$$u_{n+1} < hu_n, \quad u_{n+2} < h^2 u_n, \quad u_{n+3} < h^3 u_n, \quad \text{ec.},$$

avremo, indicando con R_n il resto della serie proposta,

$$R_n < \frac{h}{1-h} u_n \quad .$$

Esempio. La serie

$$2 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} + \cdots$$

è convergente. Infatti posto $u_n = \frac{1}{1.2\ldots n}$, si trova $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{n+1}$, da cui

$$lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = 0.$$

Il resto R_n è dato dalla formola

$$R_n = \frac{1}{1.2\ldots.(n+1)} \left(1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \cdots\right),$$

ovvero

$$R_n < \frac{1}{1.2\ldots(n+1)} \left(1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots\right),$$

e finalmente

$$R_n < \frac{1}{1.2\ldots.n} \cdot \frac{1}{n}.$$

116. La somma della serie considerata nell'esempio precedente è una quantità che ha grande importanza nelle matematiche, ove si rappresenta sempre colla lettera e, in guisa che si ha

$$e = 2 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} + \cdots.$$

La quantità e *è un numero incommensurabile compreso fra* 2 *e* 3.

Si ha evidentemente

$$e > 2\,,\quad e < 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots < 3.$$

Supponiamo che e sia un numero commensurabile; poichè non è un numero intero, sarà una frazione irriduttibile $\frac{p}{q}$, talchè avremo

$$\frac{p}{q} = 2 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \cdots + \frac{1}{1.2\ldots q} + \frac{1}{1.2\ldots(q+1)} + \cdots,$$

da cui

$$\frac{p}{q} - 2 - \frac{1}{1.2} - \frac{1}{1.2.3} - \cdots - \frac{1}{1.2\ldots.q}$$
$$= \frac{1}{1.2\ldots.(q+1)} + \frac{1}{1.2\ldots.(q+2)} + \cdots$$

Moltiplicando i due membri di quest' eguaglianza per il prodotto $1.2\ldots.q$ e indicando con N il primo membro dell' eguaglianza che ne risulta, troveremo

$$N = \frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)(q+2)} + \cdots,$$

e per conseguenza

$$< \frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)^2} + \cdots = \frac{\frac{1}{q+1}}{1 - \frac{1}{q+1}},$$

ovvero $$N < \frac{1}{q}.$$

Quindi il numero intero N sarebbe compreso fra 0 e $\frac{1}{q}$, lo che è assurdo.

Il numero e non può essere neppure radice di una equazione quadratica con coefficienti commensurabili, e il suo quadrato e^2 è altresì un numero incommensurabile. La dimostrazione di queste due proposizioni si può leggere nel tomo 5° della prima serie del *Journal de Mathématiques di Liouville.*

117. Il criterio che abbiamo dato per la convergenza delle serie riesce inapplicabile tutte le volte che si ha $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$; ma se il rapporto $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ comunque convergente verso 1 finisce però per essere sempre maggiore del suo limite, cioè se si ha $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{1+\alpha}$ ove α è una quantità negativa che converge a zero, la serie è divergente, poichè in questo caso i termini finiscono per formare una serie crescente.

Così per es.: nella serie che ha per termine generale

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n},$$

posto $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{1+\alpha}$, si trova

$$\alpha = -\frac{\frac{1}{2^{n+1}}}{1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^{n+1}}}, \quad \lim \alpha = 0.$$

Ora la serie proposta è divergente, poichè il termine generale ha per limite 2. [1]

---

[1] Se i termini della serie non hanno tutti lo stesso segno, la serie può essere indeterminata. Così la serie che ha per termine generale $(-1)^n\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right)$ è indeterminata, poichè si ha

$$S_{2n} = -\left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \cdots + \frac{1}{2^{2n}}\right)$$

$$S_{2n+1} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^5} + \cdots + \frac{1}{2^{2n+1}},$$

lo che mostra che tanto S_{2n} quanto S_{2n+1} tendono verso limiti finiti, il primo negativo, il secondo positivo.

Se si ha contemporaneamente $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$ e $\alpha > 0$, si potrà far uso del seguente teorema.

118. *La serie che ha per termine generale* u_n *è convergente o divergente secondochè*

$$\lim \left[n - (n+1) \frac{u_{n+1}}{u_n} \right],$$

è una quantità positiva o negativa.

Abbiamo dimostrato (83) che la serie

$$1 + \frac{\beta}{\alpha + \beta} + \frac{\beta(\beta+1)}{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1)} + \cdots,$$

è convergente per $\alpha > 1$ e divergente per $\alpha < 1$. Quindi la serie (90)

$$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \cdots,$$

è convergente se si ha

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < \frac{\beta + n}{\alpha + \beta + n} \quad \text{e} \quad \alpha > 1.$$

e divergente se si ha

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} > \frac{\beta + n}{\alpha + \beta + n} \quad \text{e} \quad \alpha < 1.$$

Dalla prima disuguaglianza si ricava

$$n - (n+1) \frac{u_{n+1}}{u_n} > \frac{\alpha - 1 - \frac{\beta}{n}}{1 + \frac{\alpha + \beta}{n}},$$

e passando al limite

$$\lim \left[n - (n+1) \frac{u_{n+1}}{u_n} \right] > \alpha - 1 > 0.$$

Dunque la serie proposta è convergente se si verifica questa condizione.

Al modo stesso si proverebbe che la serie è divergente se si ha

$$\lim \left[n - (n+1) \frac{u_{n+1}}{u_n} \right] < 0.$$

Esempio. La serie

$$1+\frac{1}{2}\frac{1}{3}+\frac{1.3}{2.4}\frac{1}{5}+\frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{1}{7}+\dots$$

è convergente. Infatti posto

$$u_n=\frac{1.3.5\dots(2n-1)}{2.4.6\dots(2n)}\frac{1}{2n+1},$$

si trova

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{(2n+1)^2}{(2n+2)(2n+3)},$$

da cui

$$n-(n+1)\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{2n^2+n-1}{(2n+2)(2n+3)},$$

e passando al limite

$$lim\left[n-(n+1)\frac{u_{n+1}}{u_n}\right]=\tfrac{1}{2}>0.$$

119. *Una serie i cui termini sono indefinitamente decrescenti, e nella quale si ha*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{1}{1+\alpha} \quad e \quad lim\, n\alpha=k,$$

è convergente o divergente secondochè k *è maggiore o minore di* 1.

Cominciamo dal dimostrare che se n ed m sono due numeri positivi si ha

$$\lim_{n=\infty}\left[n\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^m-1\right)\right]=m.$$

Questa formola è una conseguenza immediata della formola del binomio (105) pel caso in cui m è un numero intero e positivo; basta quindi dimostrarla nel caso che si abbia $m=\frac{p}{q}$, ove p e q sono due numeri interi e positivi. Se facciamo $\frac{1}{n}=\delta$, δ andrà a zero al crescere di n e l'espressione $(1+\delta)^{\frac{p}{q}}$, sarà certamente maggiore di 1; in guisa che potremo scrivere

$$(1+\delta)^{\frac{p}{q}}=1+\varepsilon,$$

ove ε è una quantità positiva che converge a zero insieme a δ. Da questa formula si deduce

$$\frac{(1+\delta)^{\frac{p}{q}}-1}{\delta}=\frac{\varepsilon}{\delta}=\frac{\varepsilon}{\delta}\frac{(1+\delta)^p-1}{(1+\varepsilon)^q-1}=\frac{\frac{(1+\delta)^p-1}{\delta}}{\frac{(1+\delta)^q-1}{\delta}},$$

poichè si ha

$$\frac{(1+\delta)^p-1}{(1+\varepsilon)^q-1}=1.$$

Se facciamo convergere δ a zero, troveremo

$$lim\left[\frac{(1+\delta)^{\frac{p}{q}}-1}{\delta}\right]=\frac{p}{q}.$$

Ciò posto supponiamo in prima che si abbia $k>1$. Indicando con m un numero compreso fra k e 1, avremo

$$lim\; n\alpha > lim\; n\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^m-1\right];$$

in guisa che, a cominciare da un certo valore di n, dovremo avere

$$\alpha>\left(1+\frac{1}{n}\right)^m-1,$$

da cui

$$\frac{1}{1+\alpha}<\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^m}.$$

Da questa disuguaglianza segue che, a cominciare da un certo termine, il rapporto di due termini consecutivi della serie

$$u_1+u_2+\cdots+u_n+u_{n+1}+\cdots$$

è minore del rapporto di due termini corrispondenti della serie convergente (91)

$$1+\frac{1}{2^m}+\cdots+\frac{1}{n^m}+\frac{1}{(n+1)^m}+\cdots;$$

dunque la prima serie è convergente.

Se $k < 1$, a cominciare da un certo valore di n deve aversi $n\alpha < 1$, da cui

$$\frac{1}{1+\alpha} > \frac{1}{1+\frac{1}{n}}.$$

Dunque, a cominciare da un certo termine, il rapporto di due termini consecutivi della serie proposta è maggiore del rapporto corrispondente di due termini consecutivi della serie divergente

$$1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\cdots;$$

laonde la serie proposta è divergente.

120. Il teorema precedente cessa di essere applicabile se $k=1$. Tuttavia se a cominciare da un certo valore di n, la quantità $n\alpha$ si mantiene sempre più piccola del suo limite k, la serie è divergente. Infatti allora si ha $\alpha < \frac{1}{n}$ e per conseguenza $\frac{1}{1+\alpha} > \frac{1}{1+\frac{1}{n}}$ come precedentemente. Anche se α è $> \frac{1}{n}$ ma $< \frac{1}{n-h}$, ove h è un numero determinato, la serie è divergente; poichè in questo caso $\frac{1}{1+\alpha}$, rapporto di due termini consecutivi della serie data, è maggiore di $\frac{1}{1+\frac{1}{n-h}}$ rapporto di due termini consecutivi della serie divergente (88)

$$\frac{1}{1-h}+\frac{1}{2-h}+\cdots+\frac{1}{n-h}+\frac{1}{n+1-h}+\cdots.$$

Esempii. 1°. La serie.

$$\frac{1}{2}+\frac{1.3}{2.4}+\frac{1.3.5}{2.4.6}+\cdots,$$

è divergente. Infatti si ha

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{2n+1}{2n+2}=\frac{1}{1+\frac{1}{2n+1}},$$

da cui

$$lim\, n\alpha = lim \frac{1}{2+\frac{1}{n}} = \frac{1}{2} < 1.$$

2°. La serie.

$$\left(\frac{log\, 2}{2}\right)^{\mu} + \left(\frac{log\, 3}{3}\right)^{\mu} + \left(\frac{log\, 4}{4}\right)^{\mu} + \cdots,$$

ove la base dei logaritmi è un numero maggiore di 1, è convergente per $\mu < 1$, divergente per $\mu \leq 1$. In questo esempio abbiamo

$$\alpha = \left[\frac{log\, n}{log\,(n+1)}\right]^{\mu}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{\mu} - 1$$

da cui

$$n\alpha = \left[\frac{1}{1+\frac{log\left(1+\frac{1}{n}\right)}{log\, n}}\right]^{\mu} n\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\mu} - n.$$

Se ora osserviamo che $\dfrac{log\left(1+\frac{1}{n}\right)}{log\, n}$ è una quantità positiva che converge a zero al crescere di n, facendo

$$\frac{log\left(1+\frac{1}{n}\right)}{log\, n} = \delta\ ,$$

sarà δ una quantità che decresce più rapidamente che non aumenti n; allora al valore di $n\alpha$ potremo dare la forma

$$n\alpha = \frac{n\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\mu} - 1\right]}{(1+\delta)^{\mu}} + n\,[(1+\delta)^{-\mu} - 1].$$

Il secondo membro si compone di due termini, il primo dei quali converge verso μ e il secondo verso zero, poichè il fattore $(1+\delta)^{-\mu} - 1$ tende a zero più rapidamente che n non cresca. Laonde $n\alpha$ converge continuamente verso μ, mantenendosi però sempre minore del suo limite. Quindi se si ha $\mu > 1$ la serie è convergente, se si ha $\mu < 1$, la serie è divergente, e final-

mente se $\mu = 1$ la serie è altresì divergente, poichè dal valore di α in questa ipotesi, risulta $\alpha > \frac{1}{n}$.

121. *La serie che ha per termine generale* u_n, *è convergente o divergente secondochè* $\sqrt[n]{u_n}$ *tende verso un limite* k *minore o maggiore dell' unità.*

Indichiamo con h un numero compreso fra k e 1; allora è chiaro che nella prima ipotesi, da un certo valore di n sino all'infinito, $\sqrt[n]{u_n}$ finirà per essere sempre minore di h. Quindi avremo

$$u_n < h^n, \quad u_{n+1} < h^{n+1}, \quad u_{n+2} < h^{n+2}, \quad \dots ;$$

dunque la serie proposta è convergente, poichè, a cominciare da un certo valore di n, tutti i suoi termini sono minori di quelli corrispondenti della progressione geometrica convergente $h^n + h^{n+1} + h^{n+2} + \dots$

Nella seconda ipotesi, h è un numero maggiore dell'unità, e $\sqrt[n]{u_n}$ finirà per essere sempre maggiore di h, da un certo valore di n sino all'infinito, e avremo $u_n > h^n$; laonde a cominciare da u_n, i termini della serie data sono maggiori di quelli della progressione geometrica crescente $h^n + h^{n+1} + \dots$; quindi la serie è divergente.

Esempio. La serie

$$\frac{a+1}{a}x + \left(\frac{a+2}{a+1}x\right)^2 + \left(\frac{a+3}{a+2}x\right)^3 + \dots$$

ove a è un numero frazionario positivo o negativo, è convergente o divergente secondochè x è minore o maggiore dell' unità.

Infatti si ha $\lim \sqrt[n]{u_n} = x$.

122. *Se la serie*

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$$

è convergente, si ha

$$\lim n\, u_n = 0, \quad \lim n\,(\log n)\, u_n = 0, \quad \lim n \log n\,(\log^2 n)\, u_n = 0, \text{ ec.}$$

Indichiamo con α il limite di $n u_n$; se α non è zero, potremo sempre trovare un numero β compreso fra α e 0 tale che, a cominciare da un certo valore di n, si abbia $n u_n > \beta$; quindi

la serie proposta è divergente, poichè ha i suoi termini, a cominciare da u_n, maggiori dei termini corrispondenti della serie divergente

$$\beta + \frac{\beta}{2} + \cdots + \frac{\beta}{n} + \cdots$$

Per dimostrare il teorema generale, cioè per provare che se l'espressione $n \log n \log^2 n \ldots (\log^p n) u_n$ ha un limite diverso da zero, la serie proposta è divergente, basta confrontare questa serie colla serie S del n° 92 che è divergente per $\mu = 1$.

123. *La serie*

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$$

è convergente se, posto

$$lim\, n^{k+1} u_n = p_1, \quad lim\, n (\log n)^{k+1} u_n = p_2,$$
$$lim\, n \log n (\log^2 n)^{k+1} u_n = p_3, \text{ ec.}$$

ove $k > 0$, *una delle quantità* p *non è infinita.*

Indichiamo con δ una quantità maggiore di p_1; per un valore sufficientemente grande di n avremo $n^{k+1} u_n < \delta$, e per conseguenza i termini della serie proposta, a cominciare dall'ennesimo, sono minori dei termini corrispondenti della serie convergente

$$\frac{\delta}{1} + \frac{\delta}{2^{k+1}} + \cdots + \frac{\delta}{n^{k+1}} + \cdots$$

Il confronto colla serie S è sufficiente per dimostrare il teorema generale.

Esempio. La serie

$$\frac{1}{2^{a+\alpha}} + \frac{2^a}{3^{a+\alpha}} + \cdots + \frac{n^a}{(n+1)^{a+\alpha}} + \cdots$$

è convergente o divergente secondochè α supera o non supera l'unità.

Infatti si ha

$$lim\, n u_n = lim \frac{n^{a+1}}{(n+1)^{a+\alpha}}$$
$$= lim \left[\left(\frac{n}{n+1} \right)^{a+1} \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} \right] = lim \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}}$$

lo che mostra che $\lim n u_n$ non può essere eguale a zero se α non è maggiore di 1.

Inoltre

$$\lim n^{k+1} u_n = \lim \frac{1}{n^{\alpha-1-k}} = 0,$$

se $\alpha > 1$ e $k < \alpha - 1$.

Serie i cui termini non hanno tutti lo stesso segno.

124. Se una serie i cui termini hanno tutti lo stesso segno è convergente, sarà pure convergente la serie formata dai medesimi termini ma presi con segni diversi; poichè il valore numerico del resto di questa seconda serie sarà minore di quello della prima e per conseguenza avrà per limite zero. Quindi i criterii che determinano la convergenza delle serie a termini positivi, sussistono egualmente per una serie qualunque; non così i criterii che determinano la divergenza. In altre parole, se una serie a termini positivi è divergente, la serie formata dai medesimi termini presi con segni differenti può essere convergente. Quando si verifica questa circostanza, bisogna dimostrare direttamente la convergenza della serie proposta. Il seguente teorema serve a quest'oggetto ed è applicabile in un gran numero di casi.

125. *Una serie è convergente se, a cominciare da un dato termine, quelli che seguono sono alternativamente positivi e negativi, e decrescono indefinitamente.*

Questo teorema è una conseguenza immediata di quello che abbiamo dimostrato nel n° 89.

Infatti in virtù di quel teorema se una serie

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \cdots,$$

è convergente o indeterminata, la serie

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 + \cdots,$$

ove le quantità u sono sottoposte alle condizioni

$$u_1 > u_2 > u_3 > \cdots, \quad \lim u_n = 0,$$

è una serie convergente.

Quindi se per la prima serie prendiamo la serie indeterminata

$$1-1+1-1+1-1+\cdots ,$$

la serie

$$U=u_1-u_2+u_3-u_4+\cdots ,$$

che soddisfa alle condizioni precedenti è convergente.

Del resto di questo teorema può darsene una dimostrazione diretta facilissima.

Indicando con U_{2n} la somma dei primi $2n$ termini della serie proposta, si ha

$$U_{2n+1}-U_{2n}=u_{2n+1} , \quad U_{2n+1}-U_{2n+2}=u_{2n+2}$$

da cui

$$lim(U_{2n+1}-U_{2n})=0 , \quad lim(U_{2n+1}-U_{2n+2})=0 ,$$

lo che mostra che le quantità U_{2n}, U_{2n+1}, U_{2n+2}, cioè tanto le somme di un numero pari quanto le somme di un numero dispari di termini della serie data, tendono verso uno stesso limite. Questo limite è finito e positivo, poichè si vede facilmente che

$$u_1>U_{2n}>u_1-u_2 , \quad u_1>U_{2n-1}>u_1-u_2 .$$

In generale è manifesto che la somma U è compresa fra due somme consecutive qualunque di un numero limitato di termini, e che le somme di un numero pari di termini formano una serie crescente e le somme di un numero dispari di termini formano una serie decrescente.

Così la serie

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots ,$$

è convergente e la sua somma è compresa fra i numeri 1 e $\frac{1}{2}$; $\frac{5}{6}$ e $\frac{7}{12}$; $\frac{47}{60}$ e $\frac{37}{60}$ ec.

126. Se i termini della serie sono decrescenti ma non indefinitamente, cioè se $lim\, u_n=\alpha$, ove α è una quantità finita, la serie è indeterminata; poichè le somme U_1, U_3, ... U_{2n-1} vanno sempre diminuendo e le somme U_2, U_4, ... U_{2n} rispettivamente

minori delle prime, vanno sempre aumentando, quindi tanto le une quanto le altre avranno limiti finiti; e inoltre

$$\lim U_{n-1} - \lim U_n = \alpha \ ,$$

Per es.: nella serie

$$\frac{2}{1}-\frac{3}{2}+\frac{4}{3}-\frac{5}{4}+\cdots+\frac{2n}{2n-1}-\frac{2n+1}{2n}+\cdots \ ,$$

il limite del termine generale è 1, e si ha

$$S_{2n}=2-\left(1+\frac{1}{2}\right)+\left(1+\frac{1}{3}\right)-\left(1+\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(1+\frac{1}{2n-1}\right)-\left(1+\frac{1}{2n}\right)$$
$$=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots-\frac{1}{2n} \ ,$$
$$S_{2n+1}=S_{2n}+\frac{2n+2}{2n+1},$$

da cui

$$\lim S_{2n+1} = \lim S_{2n} + 1.$$

127. Se poi è soddisfatta la sola condizione $\lim u_n = 0$, la serie potrebbe essere divergente. Così la serie

$$\frac{1}{\sqrt{2}-1}-\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}-1}-\frac{1}{\sqrt{3}+1}+\cdots \ ,$$

è divergente comunque si abbia $\lim u_n = 0$; infatti si ha

$$s_{2n}=2\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right) .$$

128. *L'errore che si commette prendendo la somma di un numero limitato di termini della serie* U *invece del suo limite, è minore del termine che segue quello al quale ci siamo fermati.*

Infatti dalle disuguaglianze

$$U > U_{2n+2} \quad \text{e} \quad U < U_{2n+1} \ ;$$

si deduce

$$U - U_{2n} < U_{2n+1} - U_{2n} \ ,$$
$$U_{2n+1} - U < U_{2n+1} - U_{2n+2} \ ,$$

ovvero

$$U - U_{2n} < u_{2n+1} \quad \text{e} \quad U_{2n+1} - U < u_{2n+2} .$$

129. *Una serie composta di termini positivi e di termini negativi è convergente se i gruppi successivi, formati dai termini dello stesso segno, diminuiscono indefinitamente.* [1]

La serie data deve necessariamente esser composta di una serie di gruppi, ciascuno dei quali contenga tutti i termini consecutivi che hanno lo stesso segno. Indichiamo con s_1 la somma dei termini che formano il primo gruppo, con $-s_2$ quella corrispondente al secondo gruppo, ec.; in virtù del primo teorema la serie

$$s_1 - s_2 + s_3 - s_4 + \cdots ,$$

soddisfacendo alle condizioni

$$s_1 > s_2 > s_3 > \cdots > 0 \quad \text{e} \quad \lim s_n = 0 ,$$

è convergente.

ESEMPII. 1°. La serie

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} - \frac{1}{8} - \frac{1}{9} - \frac{1}{10} \cdots ,$$

è convergente.

In questo caso si ha

$$s_1 = 1 , s_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} , \quad s_3 = \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} , \quad \cdots ,$$

e in generale

$$s_n = \frac{1}{\frac{n(n-1)}{2} + 1} + \frac{1}{\frac{n(n-1)}{2} + 2} + \cdots + \frac{1}{\frac{n(n-1)}{2} + n} ,$$

da cui

$$s_n < \frac{n}{\frac{n(n-1)}{2} + 1} ,$$

e per conseguenza

$$\lim s_n = 0 .$$

---

[1] Catalan, *Traité élémentaire des Séries*, pag. 13.

Inoltre

$$s_n - s_{n+1}$$

$$=\left[\frac{2}{n^2-n+2}-\frac{2}{n^2+n+2}\right]+\cdots+\left[\frac{2}{n^2+n}-\frac{2}{n^2+3n}\right]-\frac{2}{(n+1)(n+2)}$$

$$=4n\left[\frac{1}{(n^2-n+2)(n^2+n+2)}+\cdots+\frac{1}{(n^2+n)(n^2+3n)}\right]-\frac{2}{(n+1)(n+2)},$$

da cui

$$s_n - s_{n+1} > \frac{4}{(n+1)(n+3)}-\frac{2}{(n+1)(n+2)},$$

ovvero

$$s_n - s_{n+1} > \frac{2}{(n+2)(n+3)};$$

cioè $s_n - s_{n+1}$ è una quantità positiva.

2°. La serie

$$1+\frac{1}{4}-\frac{1}{3}-\frac{1}{16}+\frac{1}{5}+\frac{1}{36}-\frac{1}{7}-\frac{1}{64}+\cdots,$$

che ha per termine generale

$$\frac{1}{n\,sen\,\frac{n\pi}{2}-n^2\cos\frac{n\pi}{2}},$$

è convergente.

Infatti se facciamo

$$s_n=\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{4n^2},$$

avremo

$$\lim s_n = 0 \quad \text{e} \quad s_n - s_{n+1} > 0.$$

130. *L'errore che si commette prendendo la somma degli* n *primi gruppi per valore della serie, è minore del gruppo di posto* $(n+1)^{esimo}$.

CAPITOLO VI.

SERIE DOPPIE.

Serie doppie reali.

131. Si chiama serie doppia una serie della forma

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{l} u_{0,0}+u_{0,1}+u_{0,2}+\cdots+u_{0,n}+u_{0,n+1}+\cdots \\ +u_{1,0}+u_{1,1}+u_{1,2}+\cdots+u_{1,n}+u_{1,n+1}+\cdots \\ +u_{2,0}+u_{2,1}+u_{2,2}+\cdots+u_{2,n}+u_{2,n+1}+\cdots \\ +\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ +u_{m,0}+u_{m,1}+u_{m,2}+\cdots+u_{m,n}+u_{m,n+1}+\cdots \\ +\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right.$$

il cui termine generale $u_{m,n}$ è una funzione dei due indici m ed n.

Se facciamo

$$\begin{aligned} A_{s,n} &= u_{s,0}+u_{s,1}+\cdots+u_{s,n}\ , \\ B_{m,s} &= u_{0,s}+u_{1,s}+\cdots+u_{m,s}\ , \\ S_{m,n} &= A_{0,n}+A_{1,n}+\cdots+A_{m,n}\ , \\ &= B_{m,0}+B_{m,1}+\cdots+B_{m,n}\ , \end{aligned}$$

è chiaro che $S_{m,n}$ sarà il valore della serie doppia finita

$$(2)\quad \left\{\begin{array}{l} u_{0,0}+u_{0,1}+\cdots+u_{0,n} \\ +u_{1,0}+u_{1,1}+\cdots+u_{1,n} \\ \quad\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ +u_{m,0}+u_{m,1}+\cdots+u_{m,n}\,; \end{array}\right.$$

e questo valore sarà finito e determinato tutte le volte che ciascuna delle u ha un valore finito e determinato.

Ciò posto diremo che la serie doppia (1) è convergente se togliendo da essa la somma $S_{m,n}$, la somma di un numero arbitrario dei termini rimanenti disposti in un ordine qualunque, converge a zero facendo crescere indefinitamente m ed n. La somma della serie doppia (1) sarà in questa ipotesi il limite S dell'espressione $S_{m,n}$. Se la condizione precedente non è verificata, la se-

rie doppia sarà indeterminata o divergente secondochè il limite di $S_{m,n}$ sarà una quantità indeterminata o l'infinito.

132. *Se la serie doppia* (1) *è convergente, le tre serie*

$$\lim (A_{0,n} + A_{1,n} + \cdots + A_{m,n}) \; ,$$
$$\lim (B_{m,0} + B_{m,1} + \cdots + B_{m,n}) \; ,$$
$$u_{0,0} + (u_{0,1} + u_{1,0}) + (u_{0,2} + u_{1,1} + u_{2,0}) + \cdots \; ,$$

saranno altresì convergenti ed avranno per somma S.

1°. Infatti se la serie doppia (1) è convergente, è chiaro che le serie particolari, orizzontali e verticali, che la compongono, dovranno essere altresì convergenti; inoltre le due somme

$$A_{0,n} + A_{1,n} + \cdots + A_{m,n} \, ,$$
$$B_{m,0} + B_{m,1} + \cdots + B_{m,n} \, ,$$

contenendo i medesimi termini, ne segue che se prendiamo l'una o l'altra di queste somme invece della serie doppia (1), i termini trascurati saranno gli stessi ma disposti in ordine differente.

2°. Poniamo

$$\begin{aligned} s_{n+1} = {} & u_{0,0} + u_{0,1} + \cdots\cdots\cdots\cdots + u_{0,n} \\ & + u_{1,0} + u_{1,1} + \cdots\cdots\cdots + u_{1,n-1} \\ & + u_{2,0} + u_{2,1} + \cdots + u_{2,n-2} \\ & + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & + u_{n-1,0} + u_{n-1,1} \\ & + u_{n,0} \; , \end{aligned}$$

cioè indichiamo con s_{n+1} una parte limitata della serie doppia (1), nella quale sieno contenuti tutti i termini che hanno la somma degl' indici minore di $n+1$. È chiaro che se la serie (1) è convergente, s_{n+1} per n crescente avrà lo stesso limite di $S_{m,n}$. Ora se indichiamo con $w_0, w_1, w_2, \ldots . w_n$ delle quantità determinate dalle relazioni

$$\begin{aligned} w_0 &= s_1 \; , \\ w_1 &= s_2 - s_1 \; , \\ w_2 &= s_3 - s_2 \; , \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ w_n &= s_{n+1} - s_n \; , \end{aligned}$$

avremo

$$w_0 + w_1 + w_2 + \cdots + w_n = s_{n+1} \; ,$$

da cui

$$lim\,(w_0 + w_1 + w_2 + \cdots + w_n) = lim\, s_{n+1}\ ;$$

per conseguenza dalla convergenza della serie doppia (1) segue la convergenza della serie semplice

$$w_0 + w_1 + w_2 + \cdots\ ,$$

ovvero della serie

$$u_{0,0} + (u_{0,1} + u_{1,0}) + (u_{0,2} + u_{1,1} + u_{2,0}) \ldots$$

133. *Se sono convergenti le serie orizzontali che compongono la serie doppia formata dai valori assoluti dei termini della serie doppia* (1), *e se è pure convergente la serie che ha per termini le somme rispettive delle serie orizzontali predette, la serie doppia* (1) *è convergente ed è indifferente sommare i termini in direzione orizzontale o verticale.*

Indichiamo con S' una serie doppia formata dai valori assoluti dei termini della serie doppia (1), che abbia per termine generale $v_{m,n}$ e facciamo

$$a_{s,n} = v_{s,0} + v_{s,1} + \cdots + v_{s,n}$$
$$b_{m,s} = v_{0,s} + v_{1,s} + \cdots + v_{m,s}.$$

Se consideriamo la serie doppia finita

$$(3)\quad \left\{ \begin{array}{l} v_{0,0} + v_{0,1} + \cdots + v_{0,n} \\ + v_{1,0} + v_{1,1} + \cdots + v_{1,n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ + v_{m,0} + v_{m,1} + \cdots + v_{m,n} \end{array} \right.$$

invece della serie doppia infinita S', verremo a trascurare le serie

$$(4)\quad \left\{ \begin{array}{l} v_{m+1,0} + v_{m+1,1} + v_{m+1,2} + \cdots \\ + v_{m+2,0} + v_{m+2,1} + v_{m+2,2} + \cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array} \right.$$

il cui numero è illimitato e le $m+1$ serie

$$(5)\quad \left\{ \begin{array}{l} v_{0,n+1} + v_{0,n+2} + v_{0,n+3} + \cdots \\ + v_{1,n+1} + v_{1,n+2} + v_{1,n+3} + \cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ + v_{m,n+1} + v_{m,n+2} + v_{m,n+3} + \cdots \end{array} \right.$$

Ora se supponiamo che le serie orizzontali che compon-

gono S', come pure la serie delle loro somme sieno convergenti, dovremo avere che per m ed n indefinitamente crescenti, $\lim(a_{0,n}+a_{1,n}+\cdots+a_{m,n})$ dovrà essere una quantità finita; dal che segue che $\lim(a_{m+1,n}+a_{m+2,n}+a_{m+3,n}+\cdots)=0$ per m ed n crescenti indefinitamente; dunque la somma (4) ha per limite zero in qualunque ordine si dispongono i termini, sendochè sono tutti positivi.

Inoltre le serie orizzontali che compongono la serie doppia (3) sono convergenti, quindi ciascuna delle serie orizzontali contenute in (5) deve convergere verso zero al crescere di n, e per conseguenza potremo prendere n abbastanza grande perchè ciascuna di queste serie risulti minore di $\frac{\delta}{m+1}$, ove δ indica un numero arbitrariamente piccolo. Laonde la somma (5) sarà minore di δ indipendentemente dall'ordine dei suoi termini. Quindi le somme (4) e (5) al crescere di m e n si possono rendere minori di qualunque quantità data indipendentemente dall'ordine dei termini, e per conseguenza la serie doppia che ha per termine generale $v_{m,n}$, e a più forte ragione la serie doppia (1), è convergente.

134. Per chiarire con un esempio come il teorema precedente cessi di aver luogo se ciascuna delle serie orizzontali non è convergente indipendentemente dall'ordine dei termini, consideriamo la serie doppia (Schlömilch, *algebraischen Analysis*)

$$\begin{aligned}
&\tfrac{1}{2}\left(1-\tfrac{1}{2}\right)-\tfrac{1}{3}\left(1-\tfrac{1}{3}\right)+\tfrac{1}{3}\left(1-\tfrac{1}{3}\right)-\tfrac{1}{4}\left(1-\tfrac{1}{4}\right)+\tfrac{1}{4}\left(1-\tfrac{1}{4}\right)-\cdots\\
+&\tfrac{1}{2}\left(1-\tfrac{1}{2}\right)^2-\tfrac{1}{3}\left(1-\tfrac{1}{3}\right)^2+\tfrac{1}{3}\left(1-\tfrac{1}{3}\right)^2-\tfrac{1}{4}\left(1-\tfrac{1}{4}\right)^2+\tfrac{1}{4}\left(1-\tfrac{1}{4}\right)^2-\cdots\\
+&\tfrac{1}{2}\left(1-\tfrac{1}{2}\right)^3-\tfrac{1}{3}\left(1-\tfrac{1}{3}\right)^3+\tfrac{1}{3}\left(1-\tfrac{1}{3}\right)^3-\tfrac{1}{4}\left(1-\tfrac{1}{4}\right)^3+\tfrac{1}{4}\left(1-\tfrac{1}{4}\right)^3-\cdots\\
+&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

Ora è evidente che ciascuna delle serie orizzontali contenute in questa espressione è convergente; la prima ha per somma $\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right)$, la seconda $\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right)^2$, la terza $\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right)^3$, ...

Quindi la serie che ha per termini queste somme ha per valore $\frac{1}{2}$ e per conseguenza è una serie convergente.

Se invece prendiamo le serie verticali, anche queste sono

convergenti ed hanno respettivamente per somma $\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}, +\frac{2}{3}, -\frac{3}{4}, +\frac{3}{4}, \ldots$; quindi la somma di queste serie sarà eguale a

$$\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{2}{3}-\frac{3}{4}+\frac{3}{4}-\cdots$$

che è una serie indeterminata, perchè fatto

$$S_{2n-1}=\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{2}{3}-\cdots-\frac{n}{n+1}+\frac{n}{n+1},$$

$$S_{2n-2}=\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{2}{3}-\cdots-\frac{n}{n+1},$$

avremo

$$S_{2n-1}=\frac{1}{2}, \quad S_{2n-2}=\frac{1}{2}-\frac{n}{n+1},$$

e per conseguenza

$$\lim S_{2n-1}=\frac{1}{2}, \quad \lim S_{2n-2}=-\frac{1}{2}.$$

Dunque la serie doppia proposta è convergente se si sommano le serie orizzontali, è indeterminata se si sommano le serie verticali; e questo risultato è dovuto al perchè le serie orizzontali cessano di essere convergenti se si prendono tutti i termini col segno positivo. Si può provare infatti direttamente che la serie doppia è indeterminata. Consideriamo per questo oggetto la serie doppia finita

$$\begin{array}{l}
\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3}\right)-\cdots-\frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n}\right), \\
+\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3}\right)^2-\cdots-\frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)^2, \\
+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \\
+\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right)^m-\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3}\right)^m+\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3}\right)^m-\cdots-\frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)^m,
\end{array}$$

che equivale a

$$\frac{1}{2}\frac{\left(1-\frac{1}{2}\right)-\left(1-\frac{1}{2}\right)^{m+1}}{1-\left(1-\frac{1}{2}\right)}-\frac{1}{n}\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)-\left(1-\frac{1}{n}\right)^{m+1}}{1-\left(1-\frac{1}{n}\right)}$$

$$=\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}\right)^{m+1}-\left(1-\frac{1}{n}\right)+\left(1-\frac{1}{n}\right)^{m+1},$$

Il limite di questa somma per m ed n crescenti è

$$-\frac{1}{2}+lim\,lim\left(1-\frac{1}{n}\right)^{m+1},$$

Ora se supponiamo n costante avremo

$$lim\left(1-\frac{1}{n}\right)^{m+1}=0 \quad \text{e} \quad lim\,lim\left(1-\frac{1}{n}\right)^{m+1}=0\,;$$

se supponiamo m costante,

$$lim\left(1-\frac{1}{n}\right)^{m+1}=1 \quad \text{e} \quad lim\,lim\left(1-\frac{1}{n}\right)^{m+1}=1.$$

135. Dall' ultimo teorema segue che la serie doppia

$$\begin{array}{l} u_{0,0}+u_{0,1}y+u_{0,2}y^2+\cdots\\ +u_{1,0}x+u_{1,1}xy+u_{1,2}xy^2+\cdots\\ +u_{2,0}x^2+u_{2,1}x^2y+u_{2,2}x^2y^2+\cdots\\ +\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}$$

sarà convergente ed avrà per somma la somma della serie

$$(u_{0,0}+u_{0,1}y+u_{0,2}y^2+\cdots)+(u_{1,0}+u_{1,1}y+u_{1,2}y^2+\cdots)x$$
$$+(u_{2,0}+u_{2,1}y+u_{2,2}y^2+\cdots)x^2+\cdots,$$

se tanto quest' ultima serie quanto le serie orizzontali che formano i coefficienti delle varie potenze di n, sono convergenti anche se per le variabili x, y e pei coefficienti $u_{0,0}$, $u_{0,1}\ldots$ si sostituiscono i loro valori assoluti. Così la serie doppia

$$\begin{array}{l} 1+y+y^2+y^3+\cdots\\ +x+xy+xy^2+xy^3+\cdots\\ +x^2+x^2g+x^2y^2+x^2y^3+\cdots\\ +\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots. \end{array}$$

per $x^2 < 1$ e $y^2 < 1$ è convergente ed ha per somma la somma della serie

$$(1+y+y^2+\cdots)+(1+y+y^2+\cdots)x+(1+y+y^2+\cdots)x^2+\cdots$$

Infatti per le ipotesi che abbiamo fatte, quest' ultima serie e la serie

$$1+y+y^2+\cdots,$$

sono convergenti anche se per x e per y si sostituiscono i loro valori assoluti; l' ultima serie ha per somma $\frac{1}{1-y}$ e la prima

$$\frac{1}{1-y}(1+x+x^2\cdots)=\frac{1}{1-y}\frac{1}{1-x}.$$

Quindi possiamo scrivere

$$\frac{1}{(1-x)(1-y)}$$
$$=(1+y+y^2+\cdots)+(1+y+y^2+\cdots)x+(1+y+y^2+\cdots)x^2+\cdots$$

e ancora

$$\frac{1}{(1-x)(1-y)}$$
$$=(1+x+x^2+\cdots)+(1+x+x^2+\cdots)y+(1+x+x^2+\cdots)y^2+\cdots$$

In virtù del primo teorema si vede altresì che la serie

$$1+(x+y)+(x+xy+y^2)+\cdots,$$

è anche convergente.

Per altri particolari su questo soggetto si possono consultare i *Resumés analytiques* di Cauchy.

Serie doppie complesse.

136. Una serie doppia complessa è una serie della forma

$$\begin{array}{l}(u_{0,0}+iv_{0,0})+(u_{0,1}+iv_{0,1})+\cdots\\+(u_{1,0}+iv_{1,0})+(u_{1,1}+iv_{1,1})+\cdots\\+(u_{2,0}+iv_{2,0})+(u_{2,1}+iv_{2,1})+\cdots\\+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\end{array}$$

Se formiamo la serie doppia finita

$$\begin{array}{c}(u_{0,0}+iv_{0,0})+\cdots+(u_{0,n}+iv_{0,n})\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ +(u_{m,0}+iv_{m,0})+\cdots+(u_{m,n}+iv_{m,n})\,,\end{array}$$

e supponiamo che, al crescere di m e di n, la somma di un numero qualunque dei termini rimanenti converga a zero indipendentemente dal loro ordine, la serie doppia proposta sarà convergente. Ora questa condizione sarà verificata se ha luogo per la somma che si ottiene sostituendo ai termini i loro moduli rispettivi. Quindi la serie doppia proposta è convergente se è tale la serie formata dai moduli; cioè, indicando con $\rho_{m,n}$ il modulo di $(u_{m,n}+iv_{m,n})$, se è convergente la serie doppia

$$\begin{array}{l}\rho_{0,0}+\rho_{0,1}+\rho_{0,2}+\cdots\\ +\rho_{1,0}+\rho_{1,1}+\rho_{1,2}+\cdots\\ +\rho_{2,0}+\rho_{2,1}+\rho_{2,2}+\cdots\\ \dots\dots\dots\dots\dots\end{array}$$

Ma questa serie è convergente se sono convergenti le serie orizzontali e quella formata dalle loro somme; dunque quando queste condizioni si verificano la serie doppia complessa è convergente.

È chiaro che in questo caso si otterrà il valore della serie doppia sommando sia le serie orizzontali sia le serie verticali.

137. Se la serie doppia ha la forma

$$\begin{array}{l}a_0+a_1\,x+a_2\,x^2+\cdots\\ +a'_0+a'_1\,x+a'_2\,x^2+\cdots\\ +a''_0+a''_1\,x+a''_2\,x^2+\cdots\\ +\dots\dots\dots\dots\dots\dots,\end{array}$$

ove tanto le a quanto x sono quantità complesse, indicando con $\varphi, \varphi', \varphi''$, i valori rispettivi delle serie orizzontali e con ψ, ψ', ψ'', i valori di queste serie quando pei coefficienti si sostituiscano i moduli corrispondenti; da quel che precede si deduce che se le serie ψ, ψ', ψ'', come pure la serie $\psi+\psi'+\psi''+\cdots$, sono convergenti per un valore positivo x_0 di x, la serie doppia data sarà convergente per tutti i valori di x il cui modulo non è maggiore di x_0, e si avrà

$$\varphi+\varphi'+\varphi''+\cdots=\Sigma A_\alpha x^\alpha\,,$$

ove

$$A_\alpha = a_\alpha + a'_\alpha + a''_\alpha + \cdots$$

138. Da questo teorema se ne deducono altri due di molta importanza.

1°. Se si ha

$$\varphi = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots ,$$

e se F è una funzione razionale ed intera di φ; la serie che risulta da F se per φ si sostituisce la serie corrispondente e si ordina lo sviluppo secondo le potenze di x, è convergente indipendentemente dall'ordine dei termini e la sua somma è uguale a F, per tutti i valori di x pei quali la serie φ è convergente indipendentemente dall'ordine dei termini.

2°. Se si hanno le due serie

$$\varphi = \sum_0^\infty a_\alpha x^\alpha , \quad F = \sum_0^\infty A_\alpha \varphi^\alpha ,$$

entrambe convergenti e la seconda per tutti i valori di φ il cui modulo è minore di ρ; indicando con ψ la serie che risulta da φ se si sostituiscono pei coefficienti i loro moduli rispettivi, e con $f(x)$ la serie che risulta da F ponendo per φ la serie corrispondente, la serie $f(x)$ sarà convergente ed avremo

$$F(\varphi) = f(x) ,$$

per tutti i valori di x che soddisfano alla condizione

$$\psi(r) < \rho ,$$

ove r è il modulo di x. Talchè se il modulo di $\varphi(0)$ è minore di ρ, la serie $f(x)$ convergerà per tutti i valori di x che non superano questo modulo.

Se poi la serie $F(\varphi)$ converge per qualunque valore di φ, la serie $f(x)$ sarà convergente e l'equazione

$$F(\varphi) = f(x) ,$$

sussisterà per tutti i valori di x pei quali la serie $\varphi = \sum_0^\infty a_\alpha x^\alpha$ è convergente indipendentemente dall'ordine dei termini. [1]

---

[1] Questi teoremi si estendono facilmente a un numero qualunque di variabili. Vedi la Memoria sulle *Facoltà analitiche* di Weierstrass inserita nel Volume 51^simo^ del *Giornale di Crelle*.

Serie delle potenze reciproche dei numeri.

La considerazione delle serie doppie conduce alla dimostrazione di vari teoremi curiosi sulle serie delle potenze reciproche dei numeri, che non crediamo privi d'interesse e di cui vogliamo accennare i principali.

139. *La somma delle potenze reciproche di tutti i numeri interi a cominciare da 2 è uguale a 1.*

La serie doppia

$$\begin{array}{l} \frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\cdots \\ +\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{3^4}+\cdots \\ +\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^3}+\frac{1}{4^4}+\cdots \\ +\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots , \end{array}$$

è convergente. Infatti le serie orizzontali sono progressioni geometriche convergenti, poichè hanno per ragione numeri minori dell'unità. La somma delle serie orizzontali è altresì una serie convergente, in quanto che ciascuna serie orizzontale è della forma

$$\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^4}+\cdots=\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x};$$

quindi la somma delle serie orizzontali è data da

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots=1.$$

Da ciò segue che la serie doppia proposta ha per valore 1 e che in essa (133) possiamo sommare i termini per verticali, in guisa che avremo per tutti i valori interi di n maggiori di 1,

$$\Sigma\frac{1}{n^2}+\Sigma\frac{1}{n^3}+\Sigma\frac{1}{n^4}+\cdots=1. \tag{6}$$

140. *La somma delle potenze pari reciproche di tutti i numeri interi a cominciare da 2 è eguale a* $\frac{3}{4}$.

La serie doppia

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^6}+\cdots\\+&\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{3^6}+\cdots\\+&\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^4}+\frac{1}{4^6}+\cdots\\+&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,\end{aligned}$$

è convergente. La convergenza delle serie orizzontali è evidente; per provare quella della serie delle loro somme, osserviamo che una qualunque fra le serie orizzontali si può rappresentare con

$$\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4}+\frac{1}{x^6}+\cdots=\frac{1}{x^2-1};$$

quindi la serie delle loro somme è data da

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2^2-1}+\frac{1}{3^2-1}+\frac{1}{4^2-1}+\cdots\\=&\frac{1}{2^2-1}+\frac{1}{4^2-1}+\frac{1}{6^2-1}+\cdots\\+&\frac{1}{3^2-1}+\frac{1}{5^2-1}+\frac{1}{7^2-1}+\cdots\\=&\frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\cdots\right]\\+&\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{8}\right)+\cdots\right]=\frac{3}{4}.\end{aligned}$$

Dunque la serie doppia è convergente ed ha per somma $\frac{3}{4}$; talchè sommando per verticali avremo per $n>1$

$$\Sigma\frac{1}{n^2}+\Sigma\frac{1}{n^4}+\Sigma\frac{1}{n^6}+\cdots=\frac{3}{4}. \tag{7}$$

141. *La somma delle potenze dispari reciproche di tutti i numeri interi a cominciare da 2 è uguale a* $\frac{1}{4}$.

Sottraendo dalla serie (6) la (7) si trova immediatamente

$$\Sigma\frac{1}{n^3}+\Sigma\frac{1}{n^5}+\Sigma\frac{1}{n^7}+\cdots=\frac{1}{4}. \tag{8}$$

Dalle formule (7) e (8) si ricava

$$\Sigma\frac{1}{n^2}-\Sigma\frac{1}{n^3}+\Sigma\frac{1}{n^4}-\Sigma\frac{1}{n^5}+\cdots=\frac{1}{2}.$$

142. *La somma delle potenze pari reciproche dei numeri dispari a cominciare da 3 è uguale a $\frac{1}{4}$.*

Se nella formola

$$\frac{1}{x^n-1}=\frac{1}{x^n}+\frac{1}{(x^2)^n}+\frac{1}{(x^3)^n}+\frac{1}{(x^4)^n}+\cdots$$

facciamo $n=2$, e per x sostituiamo successivamente tutti i numeri dispari a cominciare da 3, troveremo

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}=&\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{3^6}+\cdots\\ &+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{5^4}+\frac{1}{5^6}+\cdots\\ &+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{7^4}+\frac{1}{7^6}+\cdots\\ &+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\end{aligned}$$

ovvero per $n\geq 1$

$$(9)\qquad \frac{1}{4}=\Sigma\frac{1}{(2n+1)^2}+\Sigma\frac{1}{(2n+1)^4}+\Sigma\frac{1}{(2n+1)^6}+\cdots$$

143. *La somma delle potenze pari reciproche di tutti i numeri pari è uguale a $\frac{1}{2}$.*

Se nella medesima formola del n° precedente facciamo $n=2$ e sostituiamo per x successivamente tutti i numeri pari, avremo

$$(10)\qquad \frac{1}{2}=\Sigma\frac{1}{(2n)^2}+\Sigma\frac{1}{(2n)^4}+\Sigma\frac{1}{(2n)^6}+\cdots$$

144. *La somma delle potenze reciproche di tutti i numeri pari è uguale a l2.* ([1])

Dimostreremo in seguito che

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots=l2\ ;$$

([1]) La caratteristica l si riferisce al sistema di logaritmi che ha per base il numero e (146).

ciò posto dalla formola

$$\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x}=\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}+\cdots$$

che sussiste (85) per tutti i valori di $x>1$, ponendo successivamente $x=2, 4, 6, \ldots$ si deduce

$$(11) \qquad l2=\Sigma\frac{1}{(2n)^2}+\Sigma\frac{1}{(2n)^3}+\Sigma\frac{1}{(2n)^4}+\cdots$$

145. *La somma delle potenze reciproche di tutti i numeri dispari è uguale a* $1-l2$.

Dalle formole (6) e (11) si ottiene

$$(12) \quad 1-l2=\Sigma\frac{1}{(2n+1)^2}+\Sigma\frac{1}{(2n+1)^3}+\Sigma\frac{1}{(2n+1)^4}+\cdots$$

146. *La somma delle potenze dispari reciproche di tutti i numeri pari è uguale a* $l2-\frac{1}{2}$.

Le formole (10) e (11) danno

$$(13) \qquad l2-\frac{1}{2}=\Sigma\frac{1}{(2n)^3}+\Sigma\frac{1}{(2n)^5}+\Sigma\frac{1}{(2n)^7}+\cdots$$

147. *La somma delle potenze dispari reciproche di tutti i numeri dispari è uguale a* $\frac{3}{4}-l2$.

Dalle formole (9) e (12) si ricava

$$(14) \quad \frac{3}{4}-l2=\Sigma\frac{1}{(2n+1)^3}+\Sigma\frac{1}{(2n+1)^5}+\Sigma\frac{1}{(2n+1)^7}+\cdots$$

148. *La somma delle potenze pari reciproche di tutti i numeri interi della forma* $4n+3$ *è uguale a* $\frac{1}{4}l2$.

Poniamo nella formola

$$\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4}+\frac{1}{x^6}+\cdots=\frac{1}{x^2-1}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right),$$

successivamente per x i numeri interi $3, 7, 11, \ldots$ e sommiamo i risultati, troveremo

$$(15) \qquad \Sigma\frac{1}{(4n+3)^2}+\Sigma\frac{1}{(4n+3)^4}+\Sigma\frac{1}{(4n+3)^6}+\cdots$$

$$=\frac{1}{3^2-1}+\frac{1}{7^2-1}+\frac{1}{11^2-1}+\cdots=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\cdot 4}+\frac{1}{6\cdot 8}+\cdots\right)=\frac{1}{4}l2.$$

149. *La somma delle potenze pari reciproche di tutti i numeri interi della forma* $4n+1$ *è uguale a* $\frac{1}{4}(1-l2)$.

Dalla formola

$$\frac{1}{3^2-1}+\frac{1}{5^2-1}+\frac{1}{7^2-1}+\cdots=\frac{1}{4}$$

sottraendo la formola (15) si trova

$$(16)\qquad \Sigma\frac{1}{(4n+1)^2}+\Sigma\frac{1}{(4n+1)^4}+\Sigma\frac{1}{(4n+1)^6}+\cdots$$
$$=\frac{1}{5^2-1}+\frac{1}{9^2-1}+\frac{1}{13^2-1}+\cdots=\frac{1}{4}(1-l2).$$

150. *La somma delle potenze pari reciproche di tutti i numeri interi della forma* $4n+2$ *è uguale a* $\frac{\pi}{8}$;

Dimostreremo in seguito che

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots=\frac{\pi}{4};$$

ora se nella formola del n° 148 poniamo per x successivamente i numeri 2, 6, 10, ... e facciamo la somma dei risultati, avremo

$$(17)\qquad \Sigma\frac{1}{(4n+2)^2}+\Sigma\frac{1}{(4n+2)^4}+\Sigma\frac{1}{(4n+2)^6}+\cdots$$
$$=\frac{1}{2^2-1}+\frac{1}{6^2-1}+\frac{1}{10^2-1}+\cdots=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots\right)=\frac{\pi}{8}.$$

151. *La somma delle potenze pari reciproche di tutti i numeri interi della forma* $4n$ *è uguale a* $\frac{1}{2}-\frac{\pi}{8}$.

Sottraendo dalla formola

$$\frac{1}{2^2-1}+\frac{1}{4^2-1}+\frac{1}{6^2-1}+\cdots=\frac{1}{2},$$

la (17) si ha

$$\Sigma\frac{1}{(4n)^2}+\Sigma\frac{1}{(4n)^4}+\Sigma\frac{1}{(4n)^6}+\cdots$$
$$=\frac{1}{4^2-1}+\frac{1}{8^2-1}+\frac{1}{12^2-1}+\cdots=\frac{1}{2}-\frac{\pi}{8}.$$

152. *La somma delle potenze dispari reciproche di tutti i numeri interi della forma* $4n+3$ *è uguale a* $\frac{\pi}{8}-\frac{l2}{2}$.

Dalle formole

$$\frac{1}{x-1}=\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}+\cdots$$

$$\frac{1}{x+1}=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}-\cdots$$

si deducono le altre

$$-\frac{1}{4n+3+1}=-\frac{1}{4n+3}+\frac{1}{(4n+3)^2}-\frac{1}{(4n+3)^3}+\cdots$$

$$\frac{1}{4n+5-1}=\frac{1}{4n+5}+\frac{1}{(4n+5)^2}+\frac{1}{(4n+5)^3}+\cdots;$$

nelle quali facendo successivamente $n=0, 1, 2, 3, \ldots$ e sommando i risultati si trova

$$\begin{aligned}0=&-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\cdots\\ &+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{9^2}+\cdots\\ &-\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}-\frac{1}{7^3}+\frac{1}{9^3}-\cdots\\ &+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+\frac{1}{7^4}+\frac{1}{9^4}+\cdots\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\end{aligned}$$

ovvero

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{4}-1=&-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}-\frac{1}{3^4}+\cdots\\ &-\frac{1}{5^2}-\frac{1}{5^3}-\frac{1}{5^4}-\cdots\\ &-\frac{1}{7^2}+\frac{1}{7^3}-\frac{1}{7^4}+\cdots\\ &-\frac{1}{9^2}-\frac{1}{9^3}-\frac{1}{9^4}-\cdots\\ &-\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,\end{aligned}$$

ove si osserva che tutte le potenzo pari sono negative e che le

potenze dispari sono positive o negative secondochè appartengono a numeri della forma $4n+3$ o della forma $4n+1$.

Aggiungendo questa formola all'altra (9)

$$\begin{aligned}\frac{1}{4} = & \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{3^6} + \cdots \\ & + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{5^6} + \cdots \\ & + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{7^4} + \frac{1}{7^6} + \cdots \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots ,\end{aligned}$$

otterremo

$$(a) \qquad \begin{aligned}\frac{\pi}{4} - \frac{3}{4} = & \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^5} + \frac{1}{3^7} + \cdots \\ & - \frac{1}{5^3} - \frac{1}{5^5} - \frac{1}{5^7} - \cdots \\ & + \frac{1}{7^3} + \frac{1}{7^5} + \frac{1}{7^7} + \cdots \\ & - \frac{1}{9^3} - \frac{1}{9^5} - \frac{1}{9^7} - \cdots \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots ,\end{aligned}$$

la quale formola sommata colla (14) e diviso il risultato per 2 dà

$$(18) \quad \frac{\pi}{8} - \frac{l\,2}{2} = \Sigma \frac{1}{(4n+3)^3} + \Sigma \frac{1}{(4n+3)^5} + \Sigma \frac{1}{(4n+3)^7} + \cdots$$

153. *La somma delle potenze dispari reciproche di tutti i numeri interi della forma* $4n+1$ *è eguale a* $\frac{3}{4} - \frac{l\,2}{2} - \frac{\pi}{8}$.

Se dalla formola (14) togliamo la formola (a), spariranno tutti i numeri della forma $4n+3$ e quelli della forma $4n+1$ verranno raddoppiati; in guisa che dividendo il risultato per 2 avremo

$$(19) \quad \frac{3}{4} - \frac{l\,2}{2} - \frac{\pi}{8} = \Sigma \frac{1}{(4n+1)^3} + \Sigma \frac{1}{(4n+1)^5} + \Sigma \frac{1}{(4n+1)^7} + \cdots$$

154. *La somma delle potenze dispari reciproche di tutti i numeri interi della forma* $4n+2$ *è uguale a* $\frac{l\,2}{4}$.

Nell' eguaglianze

$$\frac{1}{4n+2+1}=\frac{1}{4n+2}-\frac{1}{(4n+2)^2}+\frac{1}{(4n+2)^3}-\cdots$$

$$-\frac{1}{4n+4-1}=-\frac{1}{4n+4}-\frac{1}{(4n+4)^2}-\frac{1}{(4n+4)^3}-\cdots$$

facendo successivamente $n=0, 1, 2, 3, \ldots$ e sommando i risultati, troveremo

$$\begin{aligned}\frac{l2}{2}=&\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{6^2}+\cdots\\ &-\frac{1}{2^3}+\frac{1}{4^3}-\frac{1}{6^3}+\cdots\\ &+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{4^4}+\frac{1}{6^4}+\cdots\\ &-\frac{1}{2^5}+\frac{1}{4^5}-\frac{1}{6^5}+\cdots\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots,\end{aligned}$$

poichè

$$\frac{l2}{2}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots\right).$$

Sottraendo questa formola dall' altra (10)

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}=&\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^6}+\cdots\\ &+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^4}+\frac{1}{4^6}+\cdots\\ &+\frac{1}{6^2}+\frac{1}{6^4}+\frac{1}{6^6}+\cdots\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\end{aligned}$$

otterremo

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\left(1-l2\right)=&\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^5}+\frac{1}{2^7}+\cdots\\ &-\frac{1}{4^3}-\frac{1}{4^5}-\frac{1}{4^7}-\cdots\\ &+\frac{1}{6^3}+\frac{1}{6^5}+\frac{1}{6^7}+\cdots\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\end{aligned}$$

Se aggiungiamo questa formola alla (13), i numeri della for-

ma $4n$ spariscono, e i numeri della formola $4n+2$ vengono raddoppiati; talchè dividendo il risultato per 2 avremo

$$(20)\quad \frac{l2}{4}=\Sigma\frac{1}{(4n+2)^3}+\Sigma\frac{1}{(4n+2)^5}+\Sigma\frac{1}{(4n+2)^7}+\cdots$$

155. *La somma delle potenze dispari reciproche di tutti i numeri interi della forma* 4n *è uguale a* $\frac{3}{4}\,l2-\frac{1}{2}$.

Togliendo dalla formola (8) la penultima eguaglianza e dividendo il risultato per 2, si trova

$$(21)\quad \frac{3}{4}l2-\frac{1}{2}=\Sigma\frac{1}{(4n)^3}+\Sigma\frac{1}{(4n)^5}+\Sigma\frac{1}{(4n)^7}+\cdots$$

156. Dalle formole precedenti si ricavano con grande facilità le somme di talune serie numeriche. Infatti sommando le due formole

$$\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x}=\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^4}+\cdots$$

$$\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}=-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}-\frac{1}{x^4}+\cdots$$

si trova

$$\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^5}+\frac{1}{x^7}+\cdots=\frac{1}{(x-1)x(x+1)}\ .$$

Da questa eguaglianza avendo riguardo alle formole che precedono, si deducono le seguenti:

$$\frac{1}{4}=\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{2.3.4}+\frac{1}{3.4.5}+\cdots\ ,$$

ponendo per x tutti i numeri interi a cominciare da 2 (18);

$$l2-\frac{1}{2}=\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{3.4.5}+\frac{1}{5.6.7}+\cdots\ ,$$

ponendo per x tutti i numeri pari (13);

$$\frac{3}{4}-l2=\frac{1}{2.3.4}+\frac{1}{4.5.6}+\frac{1}{6.7.8}+\cdots\ ,$$

ponendo per x tutti i numeri dispari a cominciare da 3 (14);

$$\frac{l2}{4}=\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{5.6.7}+\frac{1}{9.10.11}+\cdots,$$

ponendo per x tutti i numeri interi della forma $4n+2$ (20);

$$\frac{3}{4}l2-\frac{1}{2}=\frac{1}{3.4.5}+\frac{1}{7.8.9}+\frac{1}{11.12.13}+\cdots,$$

ponendo per x tutti i numeri interi della formola $4n$ (21);

$$\frac{\pi}{8}-\frac{l2}{2}=\frac{1}{2.3.4}+\frac{1}{6.7.8}+\frac{1}{10.11.12}+\cdots$$

ponendo per x tutti i numeri interi della forma $4n+3$ (18);

$$\frac{3}{4}-\frac{l2}{2}-\frac{\pi}{8}=\frac{1}{4.5.6}+\frac{1}{8.9.10}+\frac{1}{12.13.14}+\cdots,$$

ponendo per x tutti i numeri interi della forma $4n+1$ (19).

Altre formole sullo stesso argomento si trovano nella Nota 10ª dell'*Analisi algebrica* di Stern.

CAPITOLO VII.

SERIE POTENZIALE.

Definizioni.

157. Si chiama *serie potenziale* quella che ha per somma la potenza di un polinomio. Per procedere ordinatamente, cominceremo dal considerare la *serie binomiale*

$$1 + m_1 x + m_2 x^2 + \cdots = \Sigma\, m_n x^n \;,$$

che, come vedremo, ha per somma la potenza m^{esima} di un binomio.

L'espressione m_n, definita dalla formola

$$m_n = \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots n} \,,$$

ove n è un numero intero e positivo, si dice *coefficiente binomiale.*

I coefficienti binomiali hanno varie proprietà notevoli che dimostreremo in seguito; ma fin d'ora è indispensabile conoscere una di queste proprietà, contenuta nel seguente teorema.

158. *Se α e β sono due numeri qualunque, si ha*

$$(1)\quad (\alpha+\beta)_n = \alpha_n + \alpha_{n-1}\beta_1 + \cdots + \alpha_1\beta_{n-1} + \beta_n = \sum_{h=0}^{h=n} \alpha_{n-h}\beta_h.$$

Questa formola si verifica facilmente per $n = 1, 2, 3, \ldots$; infatti dal valore di m_n si deduce

$$(\alpha+\beta)_1 = \alpha_1 + \beta_1$$

$$(\alpha+\beta)_2 = \frac{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta-1)}{1 \,.\, 2} = \alpha_2 + \alpha_1\beta_1 + \beta_2$$

$$(\alpha+\beta)_3 = \frac{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta-1)(\alpha+\beta-2)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3.} = \alpha_3 + \alpha_2\beta_1 + \alpha_1\beta_2 + \beta_3 \text{ ec.};$$

quindi avremo dimostrata la formola (1) se proveremo che ammessa vera per l'indice n sussiste altresì per l'indice $n+1$.

Ora si ha

$$(\alpha+\beta)_{n+1}=(\alpha+\beta)_n \frac{\alpha+\beta-n}{n+1}=\sum_{h=0}^{h=n} \frac{\alpha+\beta-n}{n+1}\alpha_{n-h}\beta_h ,$$

ovvero

$$(\alpha+\beta)_{n+1}=\sum_{h=0}^{h=n} \frac{\alpha-(n-h)}{n+1}\alpha_{n-h}\beta_h+\sum_{h=0}^{h=n} \frac{\beta-h}{n+1}\alpha_{n-h}\beta_h .$$

Inoltre dalla formola

$$m_{n+1}=m_n \frac{m-n}{n+1} ,$$

si ricava

$$\alpha_{n-h+1}=\alpha_{n-h}\frac{\alpha-(n-h)}{n-h+1} ,$$

$$\beta_{h+1}=\beta_h \frac{\beta-h}{h+1} ;$$

quindi

$$(\alpha+\beta)_{n+1}=\sum_{h=0}^{h=n} \frac{n-h+1}{n+1}\alpha_{n-h+1}\beta_h+\sum_{h=0}^{h=n} \frac{h+1}{n+1}\alpha_{n-h}\beta_{h+1} .$$

Il valore del secondo membro di questa formola non si altera se prendiamo $n+1$ per limite superiore di h, purchè nella seconda somma sostituiamo contemporaneamente $h-1$ per h; allora avremo

$$\begin{aligned}(\alpha+\beta)_{n+1}&=\sum_{h=0}^{h=n+1}\alpha_{n-h+1}\beta_h ,\\ &=\alpha_{n+1}+\alpha_n\beta_1+\cdots+\alpha_1\beta_n+\beta_{n+1} ,\end{aligned}$$

che differisce dalla formola (1) per la sostituzione di $n+1$ invece di n. Ma la formola (1) è verificata per $n=1, 2, 3$, dunque è vera in generale.

Convergenza della serie binomiale.

159. *La serie $\sum m_n x^n$ è convergente indipendentemente dall'ordine dei termini per tutti i punti compresi nel cerchio di convergenza di raggio 1, qualunque valore reale abbia* m; *e per*

tutti i punti della circonferenza di questo cerchio, se m *è un numero positivo. È semplicemente convergente pei soli punti di questa circonferenza che corrispondono a valori dell'argomento del numero complesso* x *che non sono multipli dispari di* π, *se* m *è un numero negativo minore in valore assoluto di* 1. *In tutti gli altri casi la serie è divergente o indeterminata.*

Per dimostrare la prima parte del teorema, osserviamo che facendo $u_n = mod\,(m_n x^n)$, si ha

$$lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = lim \left[mod \left(\frac{m-n}{n+1} x \right) \right] = mod\, x\ ;$$

quindi (114) la serie proposta è divergente se si ha $mod\, x > 1$ ed è convergente indipendentemente dall' ordine dei termini se si ha $mod\, x < 1$. Laonde, la serie data sarà divergente per tutti i punti situati al di fuori di una circonferenza di raggio 1, convergente indipendentemente dall'ordine dei termini pei punti compresi in questa circonferenza. Esaminiamo ora ciò che accade pei punti situati sopra tale circonferenza.

Per questi punti, indicando con θ l'argomento del numero complesso x, la serie $\sum m_n x^n$ diventa

$$1 + m_1 (cos\,\theta + i\, sen\,\theta) + m_2 (cos\, 2\theta + i\, sen\, 2\theta) + \cdots,$$

che è convergente, indipendentemente dall'ordine dei termini, se è convergente la serie dei moduli delle quantità

$$1,\quad m,\quad \frac{m(m-1)}{1\,.\,2},\quad \frac{m(m-1)(m-2)}{1\,.\,2\,.\,3},\ \ldots\ldots$$

Se m è un numero positivo compreso fra due numeri interi consecutivi h e $h-1$, la serie dei moduli sarà

$$1 + m + \frac{m(m-1)}{1\,.\,2} + \cdots\cdots + \frac{m(m-1)\ldots(m-h+1)}{1\,.\,2\ldots h}$$

$$+ \frac{m(m-1)\ldots(m-h+1)(h-m)}{1\,.\,2\ldots h(h+1)}$$

$$+ \frac{m(m-1)\ldots(h-m)(h+1-m)}{1\,.\,2\ldots(h+1)(h+2)}$$

$$+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ;$$

che, indicando con S_h la somma dei primi h termini, potrà scriversi

$$S_h + m_h \left[1 + \frac{h-m}{h+1} + \frac{(h-m)(h+1-m)}{(h+1)(h+2)} + \cdots \right] .$$

Ora se facciamo

$$u_n = \frac{(h-m)(h+1-m) \ldots (h+n-1-m)}{(h+1)(h+2) \ldots (h+n)} ,$$

troveremo

$$lim \left[n - (n+1) \frac{u_{n+1}}{u_n} \right] = m > 0 ;$$

lo che prova che la serie dei moduli è convergente (118). Laonde, se m è un numero positivo, la serie proposta è convergente indipendentemente dall'ordine dei termini per tutti i punti della circonferenza del cerchio di convergenza.

Se m è un numero negativo, facendo $m = -\mu$, ove μ è una quantità positiva, la serie dei moduli acquista la forma

$$1 + \mu + \frac{\mu(\mu+1)}{1.2} + \frac{\mu(\mu+1)(\mu+2)}{1.2.3} + \cdots ,$$

ed è divergente. Infatti per questa serie si trova

$$lim \left[n - (n+1) \frac{u_{n+1}}{u_n} \right] = -\mu < 0$$

Dunque sulla circonferenza limite e per valori negativi di m la serie binomiale non è convergente indipendentemente dall'ordine dei termini. Per vedere se è convergente o divergente, distinguiamo il caso in cui θ è uguale a un multiplo dispari di π, da quello in cui non lo è. Nel primo caso la serie proposta si riduce per l'appunto alla serie precedente, che è divergente. Nel secondo caso la serie data diventa

$$1 - \mu(cos\,\theta + i\,sen\,\theta) + \frac{\mu(\mu+1)}{1.2}(cos\,2\,\theta + i\,sen\,2\,\theta) - \cdots ,$$

che è indeterminata per $\mu = 1$, divergente o convergente, secondochè si ha $\mu > 1$ o $\mu < 1$; poichè la serie

$$1 - \mu + \frac{\mu(\mu+1)}{1 \cdot 2} - \cdots,$$

ha i suoi termini indefinitamente crescenti o decrescenti secondochè μ è $> 0 < 1$.

Dunque sulla circonferenza del cerchio di convergenza e per valori negativi di m, la serie binomiale è semplicemente convergente pei soli punti che corrispondono a valori dell'argomento che non sono multipli dispari di π, purchè m sia < 1. Per tutti gli altri punti e per tutti gli altri valori di m, la serie è divergente o indeterminata.

Se m ed x sono entrambe quantità reali, il teorema precedente si enuncia nel seguente modo.

La serie $\sum \mathrm{m}_n \mathrm{x}^n$ *è convergente indipendentemente dall'ordine dei termini per qualunque valore di* m *se si ha* $\mathrm{x}^2 < 1$, *e pei soli valori positivi di* m *se si ha* $\mathrm{x}^2 = 1$; *è semplicemente convergente per* $\mathrm{m} < -1$ *se si ha* $\mathrm{x} = +1$. *In tutti gli altri casi la serie è divergente o indeterminata.*

La ricerca dei criterii di convergenza della serie binomiale quando m è un numero complesso, si trova nel Capitolo 10°.

Somma della serie binomiale.

160. *In tutti i casi nei quali la serie* $\sum \mathrm{m}_n \mathrm{x}^n$ *è convergente, si ha*

$$(1 + x)^m = \sum m_n x^n. \tag{2}$$

Questa formola è stata dimostrata per qualunque valore reale o complesso di x, se m è un numero intero e positivo; resta quindi a provare che sussiste per tutti i valori reali di m.

Supponiamo che si abbia in prima $m = \frac{p}{q}$, ove p e q sono numeri interi e positivi.

La serie

$$1 + \left(\frac{p}{q}\right)_1 x + \left(\frac{p}{q}\right)_2 x^2 + \cdots,$$

essendo convergente indipendentemente dall'ordine dei suoi termini per tutti i valori del modulo di x che sono minori di 1, la sua potenza q^{esima} sarà pure una serie convergente al modo stesso e nei medesimi casi (102). Se indichiamo con $A_n x^n$ il termine generale di questa serie, cioè se facciamo

$$\left[1+\left(\frac{p}{q}\right)_1 x+\left(\frac{p}{q}\right)_2 x^2+\cdots\right]^q=\Sigma A_n x^n ,$$

dico che $A_n=p_n$.

Infatti il coefficiente di x^n nella serie che risulta dal prodotto

$$\left[\Sigma\left(\frac{p}{q}\right)_n x^n\right]\times\left[\Sigma\left(\frac{p}{q}\right)_n x^n\right]=\left[\Sigma\left(\frac{p}{q}\right)_n x^n\right]^2 ,$$

è dato dall'espressione

$$\left(\frac{p}{q}\right)_n+\left(\frac{p}{q}\right)_{n-1}\left(\frac{p}{q}\right)_1+\cdots+\left(\frac{p}{q}\right)_1\left(\frac{p}{q}\right)_{n-1}+\left(\frac{p}{q}\right)_n ,$$

che, per la formola (1), è uguale a $\left(2\frac{p}{q}\right)_n$.

Parimente il coefficiente di x^n nella serie che risulta dal prodotto

$$\left[\Sigma\left(2\frac{p}{q}\right)_n x^n\right]\times\left[\Sigma\left(\frac{p}{q}\right)_n x^n\right]=\left[\Sigma\left(\frac{p}{q}\right)_n x^n\right]^3 ,$$

è dato dall'espressione

$$\left(2\frac{p}{q}\right)_n+\left(2\frac{p}{q}\right)_{n-1}\left(\frac{p}{q}\right)_1+\cdots+\left(2\frac{p}{q}\right)_1\left(\frac{p}{q}\right)_{n-1}+\left(\frac{p}{q}\right)_n=\left(3\frac{p}{q}\right)_n ;$$

continuando a questo modo si vede manifestamente che si ha

$$\left[\Sigma\left(\frac{p}{q}\right)_n x^n\right]^q=\Sigma\, p_n x^n=(1+x)^p ,$$

da cui

$$(1+x)^{\frac{p}{q}}=\Sigma\left(\frac{p}{q}\right)_n x^n .$$

Supponiamo ora $m=-\frac{p}{q}$ ove p e q sono numeri interi e positivi, e consideriamo il prodotto

$$\left[1+\left(-\frac{p}{q}\right)_1 x+\left(-\frac{p}{q}\right)_2 x^2+\cdots\right]^q\times\left[1+\left(\frac{p}{q}\right)_1 x+\left(\frac{p}{q}\right)_2 x^2+\cdots\right]^q$$
$$=\left[\left(1+\left(-\frac{p}{q}\right)_1 x+\left(-\frac{p}{q}\right)_2 x^2+\cdots\right)\times\left(1+\left(\frac{p}{q}\right)_1 x+\left(\frac{p}{q}\right)_2 x^2+\cdots\right)\right]^q.$$

Il coefficiente del termine generale del prodotto

$$\Sigma\left(-\frac{p}{q}\right)_n x^n\times\Sigma\left(\frac{p}{q}\right)_n x^n$$

è

$$A_n=\left(-\frac{p}{q}\right)_n+\left(-\frac{p}{q}\right)_{n-1}\left(\frac{p}{q}\right)_1+\cdots+\left(\frac{p}{q}\right)_n;$$

se nella formola (1) facciamo $\alpha=-\frac{p}{q}$, $\beta=\frac{p}{q}$, vedremo che $A_n=0$ per tutti i valori di $n>0$, e $A_n=1$ per $n=0$; quindi

$$\left[\Sigma\left(-\frac{p}{q}\right)_n x^n\right]^q\left[\Sigma\left(\frac{p}{q}\right)_n x^n\right]^q=1.$$

Ma

$$\left[\Sigma\left(\frac{p}{q}\right)_n x^n\right]^q=(1+x)^p,$$

dunque

$$\left[\Sigma\left(-\frac{p}{q}\right)_n x^n\right]^q=(1+x)^{-p},$$

da cui

$$(1+x)^{-\frac{p}{q}}=\Sigma\left(-\frac{p}{q}\right)_n x^n.$$

Resta a considerare il caso in cui m è un numero incommensurabile.

Per dimostrare che la formola (2) sussiste altresì in questo caso, premettiamo il seguente teorema, interamente analogo a quello che abbiamo dato nel n° 106.

Se fra i coefficienti delle due serie convergenti

$$U = u_0 + u_1 x + u_2 x^2 + \cdots + u_n x^n + \cdots ,$$
$$V = v_0 + v_1 x + v_2 x^2 + \cdots + v_n x^n + \cdots ,$$

ove x *è una variabile complessa, ha luogo la relazione*

$$v_n = lim\, u_n ,$$

si avrà altresì

$$V = lim\, U.$$

Se facciamo $u_n = v_n + \delta_n$, δ_n sarà una quantità che converge a zero quando u_n converge verso v_n.

La serie

$$\Delta = \delta_0 + \delta_1 x + \delta_2 x^2 + \cdots ,$$

è convergente, poichè differenza delle due serie U e V, quindi Δ è una quantità finita e indicando con δ'_n il modulo di δ_n si ha

$$mod\, \Delta < \delta'_0 + \delta'_1\, mod\, x + \delta'_2 (mod\, x)^2 + \cdots$$

Se indichiamo con δ la più grande fra le quantità $\delta'_0, \delta'_1, \delta'_2 \ldots$, avremo

$$mod\, \Delta < \delta \left(\frac{1}{1 - mod\, x} \right).$$

Il secondo membro di questa disuguaglianza è il prodotto di due fattori, dei quali il primo converge verso zero, e il secondo è una quantità finita; quindi avremo

$$lim\, (mod\, \Delta) = 0 ,$$

e per conseguenza $lim\, \Delta = 0$. Laonde dall' eguaglianza

$$U = V + \Delta ,$$

risulta

$$lim\, U = V.$$

Ciò posto indichiamo con m un numero incommensurabile e con m' un numero commensurabile tale che si abbia $m = lim\, m'$; dico che avremo $m_n = lim\, m'_n$.

Infatti posto $m = m' + \delta$, sarà δ una quantità che converge a zero, ed avremo

$$m_n = \frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)}{1.2\ldots n}$$

$$= \frac{(m'+\delta)(m'+\delta-1)\cdots(m'+\delta-n+1)}{1.2\ldots.n}$$

$$= m'_n\left(1+\frac{\delta}{m'}\right)\left(1+\frac{\delta}{m'-1}\right)\cdots\left(1+\frac{\delta}{m'-n+1}\right),$$

e passando al limite

$$m_n = lim\, m'_n .$$

Ciò posto le due serie

$$1 + m'_1 x + m'_2 x^2 + \cdots$$
$$1 + m_1 x + m_2 x_2 + \cdots,$$

sono entrambe convergenti; ciascun termine della seconda è il limite del termine corrispondente della prima, quindi la seconda avrà per somma il limite della somma della prima serie. Ma la prima serie ha per somma $(1+x)^{m'}$, e si ha

$$lim\,(1+x)^{m'} = (1+x)^m;$$

quindi

$$(1+x)^m = 1 + m_1 x + m_2 x^2 + \cdots ,$$

ove m è un numero incommensurabile.

Sinora abbiamo supposto che si abbia $mod\, x < 1$. Se $mod\, x = 1$, il ragionamento precedente non ha bisogno di modificazione che nel solo caso della serie

$$\Sigma\left(-\frac{p}{q}\right)_n (cos\, n\,\theta + i\, sen\, n\,\theta),$$

la quale sappiamo che è convergente se si ha $\frac{p}{q} < 1$ e se θ non è un multiplo dispari di π. Ma la somma di questa serie si può dedurre facilmente dall' eguaglianza

$$\Sigma\left(-\frac{p}{q}\right)_n \rho^n (cos\, n\,\theta + i\, sen\, n\,\theta) = (1 + \rho\cos\theta + i\rho\, sen\,\theta)^{-\frac{p}{q}} .$$

Infatti i termini della prima serie sono i limiti dei termini corrispondenti della serie che forma il primo membro dell' ultima relazione quando si faccia convergere ρ verso l'unità; quindi la prima serie ha per somma il limite di $(1+\rho\cos\theta+i\rho\,sen\,\theta)^{-\frac{p}{q}}$ cioè si ha

$$\Sigma\left(-\frac{p}{q}\right)_n(\cos n\theta+i\,sen\,n\theta)=(1+\cos\theta+i\,sen\,\theta)^{-\frac{p}{q}}.$$

161. L'importanza della formola binomiale ci induce a darne una seconda dimostrazione dovuta a Cauchy. Premettiamo il seguente teorema

La serie

$$f(m)=\Sigma\, m_n x^n\ ;$$

è una funzione continua di x *e di* m *semprechè la serie* $\Sigma\, m_n x^n$ *è convergente.*

Che $f(m)$ sia una funzione continua di x, risulta immediatamente da un teorema che abbiamo dato nel Capitolo 4° (110); la continuità rispetto ad m si dimostra facilmente. Indichiamo con δ una quantità abbastanza piccola perchè la serie

$$f(m+\delta)=\Sigma\,(m+\delta)_n x^n\ ,$$

sia convergente nei medesimi casi in cui è convergente la serie $\Sigma\, m_n x^n$; avremo

$$f(m+\delta)-f(m)=\Sigma\,[(m+\delta)_n-m_n]\,x^n\ ;$$

ma

$$(m+\delta)_n-m_n=m_n\left[\left(1+\frac{\delta}{m}\right)\left(1+\frac{\delta}{m-1}\right)\cdots\left(1+\frac{\delta}{m+n+1}\right)-1\right];$$

ora la quantità fra parentesi converge a zero con δ qualunque sia n; dunque

$$\lim f(m+\delta)=f(m).$$

Ciò posto sieno m e n due numeri reali qualunque, avremo

$$f(m)=1+m_1 x+m_2 x^2+\cdots$$
$$f(n)=1+n_1 x+n_2 x^2+\cdots$$

ove x indica una variabile reale o complessa. Le due serie del secondo membro essendo convergenti indipendentemente dall' or-

dine dei termini, moltiplicate insieme daranno una nuova serie convergente (99) che ha per somma il prodotto $f(m)f(n)$. Il termine generale di queste serie è

$$m_r + m_{r-1} n_1 + \cdots + m_1 n_{r-1} + n_r = (m+n)_r ,$$

quindi avremo

$$f(m)f(n) = 1 + (m+n)_1 x + (m+n)_2 x^2 + \cdots ,$$

ovvero

$$f(m+n) = f(m) f(n).$$

Dunque la somma della serie proposta è una funzione continua che soddisfa a questa equazione. Per trovare il valore di questa funzione facciamo $m = n = \alpha$, avremo

$$f(2\alpha) = [f(\alpha)]^2 ;$$

moltiplicando questa formola per $f(\alpha)$ otterremo

$$f(3\alpha) = [f(\alpha)]^3 ;$$

e in generale, per un numero intero e positivo h,

$$f(h\alpha) = [f(\alpha)]^h.$$

Se in questa formola facciamo $\alpha = 1$, avremo

$$f(h) = [f(1)]^h ;$$

quindi per qualunque valore intero e positivo di m si ha

$$f(m) = (1+x)^m.$$

Supponiamo ora che si abbia $\alpha = \frac{p}{q}$, ove p e q sono numeri interi e positivi; allora facendo $h = q$ troveremo

$$f(p) = \left[f\left(\frac{p}{q}\right)\right]^q = (1+x)^p ,$$

da cui

$$f\left(\frac{p}{q}\right) = (1+x)^{\frac{p}{q}} .$$

Dunque la serie binomiale $\sum m_n x^n$ ha per somma $(1+x)^m$ per qualunque valore positivo e commensurabile di m.

Se m è un numero incommensurabile positivo, la dimostrazione si fa come nel n° precedente.

Finalmente dall' equazione $f(m)f(n)=f(m+n)$ posto $m=\alpha$, $n=-\alpha$, risulta

$$f(-\alpha)=\frac{f(o)}{f(\alpha)}=\frac{1}{(1+x)^{\alpha}}=(1+x)^{-\alpha}.$$

Dunque la serie $\sum m_n x^n$ ha per somma $(1+x)^m$ qualunque valore reale abbia m.

162. Facciamo ora una osservazione importante sulla formola (2). Nel capitolo 2° abbiamo veduto che la potenza frazionaria di una espressione qualunque, reale o complessa, ha tanti valori quante unità sono contenute nel denominatore del grado della potenza. Quindi, considerando prima il caso di una quantità reale, l' espressione $(1+x)^{\frac{p}{q}}$, ove x è una variabile reale, ha q valori differenti, dei quali $q-1$ o $q-2$, secondochè q è un numero dispari o pari, sono complessi. Ma la serie $\sum \left(\frac{p}{q}\right)_n x^n$ ha un valore unico; a quale dei valori di $(1+x)^{\frac{p}{q}}$ corrisponde? È chiaro che questa serie non può essere eguale che ad uno dei valori reali di $(1+x)^{\frac{p}{q}}$; quindi se q è un numero dispari la serie $\sum\left(\frac{p}{q}\right)_n x^n$ sarà eguale all' unico valore reale di $(1+x)^{\frac{p}{q}}$. Ma se q è pari, i valori reali sono due, uno positivo, l' altro negativo; dico che in questo caso il solo valore positivo rappresenta la serie proposta. E invero $\sum m_n x^n$ è una funzione continua di x fra i limiti -1 e $+1$, che per $x=0$ diventa $+1$; quindi se per un determinato valore di x compreso fra -1 e $+1$, la serie prendesse un valore negativo, la funzione $\sum m_n x^n$ per questo valore di x cesserebbe di essere continua.

Un ragionamento analogo può applicarsi all' equazione $(1+x)^{\frac{p}{q}}=\sum\left(\frac{p}{q}\right)_n x^n$ quando x è una variabile complessa. Il secondo membro anche in questo caso è una funzione continua di x, quindi tale deve essere altresì il primo membro. Ora tutti i valori di $(1+x)^{\frac{p}{q}}$ sono dati dalla formola

$$(1+x)^{\frac{p}{q}}(1)^{\frac{1}{q}}=(1+x)^{\frac{p}{q}}\left(\cos\frac{2h\pi}{q}+i\,sen\,\frac{2h\pi}{q}\right),$$

ove ad h bisogna dare tutti i valori da 0 sino a $q-1$. Ma affinchè $(1+x)^{\frac{p}{q}}$ sia una funzione continua di x è necessario che h abbia un solo valore costante; per vedere quale è questo valore, poniamo eguale a zero il modulo di x; avremo $\sum \left(\frac{p}{q}\right)_n x^n = 1$ e questo risultato corrisponde al valore $h=0$. Dunque perchè la formola $(1+x)^{\frac{p}{q}} = \sum \left(\frac{p}{q}\right)_n x^n$ possa sussistere, bisogna intendere che il primo membro rappresenti il più semplice valore di $(1+x)^{\frac{p}{q}}$, cioè quello che corrisponde al più semplice valore 1 di $(1)^{\frac{1}{q}}$. Infine, la formola (2) si deve scrivere nel seguente modo (44)

$$(3)\quad \begin{cases} (1+x\cos\theta+ix\,sen\,\theta)^m \\ =(1+2x\cos\theta+x^2)^{\frac{m}{2}}\left[\cos\left(m\,arc\tan\frac{x\,sen\theta}{1+x\cos\theta}\right)+i\,sen\left(m\,arc\tan\frac{x\,sen\theta}{1+x\cos\theta}\right)\right] \\ =\sum m_n x^n(\cos n\theta+i\,sen\,n\theta). \end{cases}$$

È facile vedere che da questa equazione se ne deducono le altre due

$$(1+2x\cos\theta+x^2)^{\frac{m}{2}}\cos\left(m\,arc\tan\frac{x\,sen\,\theta}{1+x\cos\theta}\right)=\sum m_n x^n \cos n\,\theta,$$

$$(1+2x\cos\theta+x^2)^{\frac{m}{2}}\,sen\left(m\,arc\tan\frac{x\,sen\,\theta}{1+x\cos\theta}\right)=\sum m_n x^n\,sen\,n\,\theta,$$

che sussistono per tutti i valori di $x<1$.

L'osservazione che abbiamo fatto in questo numero vale altresì per tutte le formole che si possono dedurre da quella del binomio.

Proprietà dei coefficienti binomiali.

163. Abbiamo già dimostrato due proprietà dei coefficienti binomiali contenute nelle seguenti formole

$$(1)\qquad (\alpha+\beta)_n=\alpha_n+\alpha_{n-1}\beta_1+\alpha_{n-2}\beta_2+\cdots+\beta_n$$
$$m_n=m_{m-n};$$

la seconda delle quali sussiste per soli valori interi e positivi di m.

Da queste equazioni si deducono altre relazioni fra i coefficienti binomiali che si applicano utilmente in varie ricerche.

Posto $\alpha = m$, $\beta = 1$ nella prima formola, avremo

$$(m+1)_n = m_n + m_{n-1};$$

cioè che il coefficiente binomiale $(n+1)^{esimo}$ relativo all'esponente $m+1$ è uguale alla somma dei coefficienti binomiali $(n+1)^{esimo}$ e n^{esimo} relativi all'esponente m; lo che mostra che conosciuti i coefficienti binomiali relativi ad un dato esponente m, si possono calcolare immediatamente i coefficienti binomiali relativi all'esponente $m+1$.

Dalla formola (2) per qualunque valore positivo di m si deducono le relazioni

$$(4)\quad \begin{cases} 2^m = m_0 + m_1 + m_2 + m_3 + m_5 + \cdots \\ 0 = m_0 - m_1 + m_2 - m_3 + m_4 - \cdots \end{cases}$$

da cui segue

$$(5)\quad 2^{m-1} = m_0 + m_2 + m_4 + \cdots = m_1 + m_3 + m_5 + \cdots$$

Se facciamo nella (1) $\alpha = \beta = n$, ove n è un numero intero e positivo, avremo

$$(2n)_n = n^2_n + n^2_{n-1} + n^2_{n-2} + \cdots + n^2_0,$$

cioè che la somma dei quadrati dei coefficienti binomiali relativi all'esponente intero e positivo n è uguale al coefficiente binomiale medio, relativo all'esponente $2n$.

164. I coefficienti binomiali

$$h_0, (h+1)_1, (h+2)_2, (h+3)_3,$$

si distinguono col nome di *numeri figurati* dell'ordine h^{esimo}. Conosciuti i numeri figurati di primo ordine, che sono i numeri naturali, quelli degli ordini seguenti si formano con grande facilità, per mezzo della formola

$$(h+k-1)_{k-1} = (h+k-2)_{k-2} + (h+k-2)_{k-1},$$

la quale mostra che il numero figurato k^{esimo} della serie di ordine h^{esimo} è uguale al termine che lo precede nella stessa serie più il

termine k^{esimo} nella serie di ordine $(h-1)^{esimo}$. Quindi le serie dei numeri figurati di 1°, 2°, 3°, 4°,.... ordine sono

$$\begin{array}{llllllll}
1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & 8,\dots \\
1, & 3, & 6, & 10, & 15, & 21, & 28, & 36,\dots \\
1, & 4, & 10, & 20, & 35, & 56, & 84, & 118,\dots \\
1, & 5, & 15, & 35, & 70, & 126, & 210, & 328,\dots \\
\dots & & & & & & &
\end{array}$$

Se nell' ultima formola facciamo successivamente $k=2, 3, 4, \dots n$ e sommiamo l' eguaglianze che ne risultano, troveremo

$$(h+n-1)_{n-1}=1+h+(h+1)_2+(h+2)_3+\cdots+(h+n-2)_{n-1},$$

dalla quale, ponendo $h+1$ per h, ricaveremo

$$(h+n)_{n-1}=h_0+(h+1)_1+(h+2)_2+(h+3)_3+\cdots+(h+n-1)_{n-1};$$

quindi la somma dei primi n termini della serie dei numeri figurati di ordine h^{esimo} è uguale al termine n^{esimo} della serie dei numeri figurati di ordine $(h+1)^{esimo}$.

Dalla definizione che abbiamo dato risulta che i numeri figurati di ordine h^{esimo} sono i coefficienti della serie che ha per somma $(1-x)^{-(h+1)}$. Infatti si ha

$$(1-x)^{-(h+1)}=1+\frac{h+1}{1}x+\frac{(h+1)(h+2)}{1.2}x^2+\cdots$$
$$+\frac{(h+1)(h+2\dots(h+n-1)}{1.2\dots(n-1)}x^{n-1}+\cdots,$$

ovvero

$$(1-x)^{-(h+1)}=1+(h+1)_1x+(h+2)_2x^2+\cdots+(h+n-1)_{n-1}x^{n-1}+\cdots,$$

Il termine n^{esimo} della serie dei numeri figurati di ordine h^{esimo}, è dato quindi dall' espressione

$$(h+n-1)_{n-1}=\frac{(h+1)(h+2)\dots(h+n-1)}{1.2\dots(n-1)}=\frac{n(n+1)\dots(n+h-1)}{1.2\dots h},$$

da cui si deduce

$$(h+n)_{h+1} = h_0 + (h+1)_1 + (h+2)_2 + \cdots + (h+n-1)_h \text{ [1]}$$

165. Fra i numeri figurati e i coefficienti binomiali hanno luogo varie relazioni notevoli, che ci proponiamo di trovare.

Se nella prima dell'equazioni (4) si sostituisce $m-h$ per m e si moltiplicano i due membri dell'equazione che ne risulta per m_h, troveremo

$$m_h 2^{m-h} = m_h + m_h (m-h)_1 + m_h (m-h)_2 + m_h (m-h)_3 + \cdots;$$

ma

$$m_h (m-h)_k = m_{h+k} (h+k)_k ;$$

quindi

$$(6)\quad m_h 2^{m-h} = m_h + m_{h+1} (h+1)_1 + m_{h+2} (h+2)_2 + m_{h+3} (h+3)_3 + \cdots$$

Si hanno altresì le due formole

$$(7)\quad \left\{ \begin{aligned} &(h+2k-1)_{2k-1} \\ &= (h+1)_{2k-1} + (h+1)_{2k-3}(h+1)_1 + (h+1)_{2k-5}(h+2)_2 + \cdots \\ &\quad + (h+1)_1 (h+k-1)_k , \\ &(h+2k)_{2k} \\ &= (h+1)_{2k} + (h+1)_{2k-2}(h+1)_1 + (h+1)_{2k-4}(h+2)_2 + \cdots \\ &\quad + (h+k)_k , \end{aligned} \right.$$

che si potrebbero dedurre dall'equazione (1); ma è più facile verificarne l'esattezza a posteriori; così considerando la seconda per es.: si ha per la formola (3)

$$\begin{aligned} &(h+2k)_{2k} \\ &= h_{2k} + h_{2k-1} + (h_{2k-2} + h_{2k-3})(h+1)_1 + (h_{2k-4} + h_{2k-5})(h+2)_2 + \cdots \\ &\quad + (h+1)_2 (h+k-1)_{k-1} + (h+k)_k \\ &= h_{2k} + h_{2k-2}\, h_1 + h_{2k-4} (h+1)_2 + \cdots + h_2 (h+k-1)_{k-1} + (h-1+k)_k \\ &+ h_{2k-1} + h_{2k-2} + h_{2k-3}(h+1)_1 + h_{2k-4}(h+1)_1 + \cdots + h_1 (h+k-1)_{k-1} + (h-1+k)_{k-1} \\ &= h_{2k} + h_{2k-2}\, h_1 + h_{2k-4}(h+1)_2 + \cdots + h_2 (h+k-1)_{k-1} + (h-1+k)_k \\ &+ (h+1)_{2k-1} + (h+1)_{2k-3}(h+1)_1 + \cdots + (h+1)_1 (h+k-1)_{k-1} , \end{aligned}$$

[1] I numeri figurati di 2° ordine sono stati chiamati numeri triangolari, quelli di 3° numeri piramidali, ec. Si dicono poi numeri *poligoni* quelli che si deducono dalla formola $m_1 + m_2 h$ dando ad h i valori 1, 2, 3, 4, ...; e propriamente triangolari per $h=1$, quadrati per $h=2$, pentagoni per $h=3$, ec.

ovvero, avendo riguardo alle formole (7),

$$(h+2k)_{2k}=(h-1+2k)_{2k}+(h+2k-1)_{2k-1},$$

relazione esatta.

Il secondo membro della formola (1) nell'ipotesi che β sia un numero intero si arresta al termine $\alpha_{n-\beta}\beta_\beta$; scrivendolo quindi in ordine inverso avremo

$$(\alpha+\beta)_n=\alpha_{n-\beta}+\alpha_{n-\beta+1}\beta_1+\alpha_{n-\beta+2}\beta_2+\cdots+\alpha_n .$$

Se in questa equazione facciamo $\alpha=m$, $\beta=h+1$, e n eguale successivamente a $2h+1$, $2h+3$, $2h+5$, ... avremo le seguenti formole

$$(m+h+1)_{2h+1}=\sum_{k=0}[m_{h+2k}(h+1)_{2k}+m_{h+2k+1}(h+1)_{2k+1}],$$

$$(m+h+1)_{2h+3}=\sum_{k=0}[m_{h+2k}(h+1)_{2k-2}+m_{h+2k+1}(h+1)_{2k-1}],$$

$$(m+h+1)_{2h+5}=\sum_{k=0}[m_{h+2k}(h+1)_{2k-4}+m_{h+2k+1}(h+1)_{2k-3}],$$

. . . .

Sommiamo queste eguaglianze dopo aver moltiplicato la 2ª per $(h+1)_1$, la 3ª per $(h+2)_2$, ec.; avendo presente le formole (7) troveremo

$$(m+h+1)_{2h+1}+(m+h+1)_{2h+3}(h+1)_1+(m+h+1)_{2h+5}(h+2)_2+\cdots$$
$$=\sum_{k=0}[m_{h+2k}(h+2k)_{2k}+m_{h+2k+1}(h+2k+1)_{2k+1}],$$

ovvero

$$m_h 2^{m-h}$$
$$=(m+h+1)_{2h+1}+(m+h+1)_{2h+3}(h+1)_1+(m+h+1)_{2h+5}(h+2)_2+\cdots$$

Se in questa formola sostituiamo $m-h-1$ per m, avremo

$$(8)\quad (m-h-1)_h 2^{m-2h-1}=m_{2h+1}+m_{2h+3}(h+1)_1+m_{2h+5}(h+2)_2+\cdots$$

Da questa equazione se ne deduce un'altra sostituendo $m+1$ per m e giovandosi poi della formola (3); operando così si trova

$$(m-h)_h 2^{m-2h}=m_{2h+1}+m_{2h+3}(h+1)_1+m_{2h+5}(h+1)_2+\cdots$$
$$+\ m_{2h}+m_{2h+2}(h+1)_1+m_{2h+4}(h+2)_2+\cdots$$

da cui

$$(m-h)_h\, 2^{m-2h} - (m-h-1)_h\, 2^{m-2h-1}$$
$$= m_{2h} + m_{2h+2}(h+1)_1 + m_{2h+4}(h+2)_2 + \cdots ;$$

ma

$$(m-h)_h\, 2^{m-2h} = (m-h-1)_{h-1}\, \frac{2m-2h}{h}\, 2^{m-2h-1},$$

$$(m-h-1)_h\, 2^{m-2h-1} = (m-h-1)_{h-1}\, \frac{m-2h}{h}\, 2^{m-2h-1},$$

quindi

$$(9)\quad (m-h-1)_{h-1}\frac{m}{h}2^{m-2h-1} = m_{2h} + m_{2h+2}(h+1)_1 + m_{2h+4}(h+2)_2 + \cdots$$

Le formole (8) e (9) possono ancor essere trasformate. Cominciando dalla seconda, osserviamo che se m è un numero pari, posto

$$h = \frac{m-2n}{2},$$

si ha

$$(m-h-1)_{h-1}\frac{m}{h}2^{m-2h-1} = \left(\frac{m+2n-2}{2}\right)_{2n}\frac{m}{m-2n}2^{2n}$$
$$= \frac{(m+2n-2)(m+2n-4)\ldots(m+2)m(m-2)\ldots(m-2n+4)(m-2n+2)m}{1\,.\,2\,.\,3\ldots(2n)}$$
$$= \frac{m^2(m^2-2^2)(m^2-4^2)\ldots(m^2-(2n-2)^2)}{1\,.\,2\,.\,3\ldots(2n)}$$
$$= \frac{m^2(m^2-2^2)(m^2-4^2)\ldots(m^2-(m-2h-2)^2)}{1\,.\,2\,.\,3\ldots(m-2h)}.$$

Quindi per m numero pari avremo

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned} &(m-h-1)_{h-1}\frac{m}{h}2^{m-2h-1} \\ &= m_{2h} + m_{2h+2}(h+1)_1 + m_{2h+4}(h+2)_2 + \cdots \\ &= \frac{m^2(m^2-2^2)(m^2-4^2)\ldots(m^2-(m-2h-2)^2)}{1\,.\,2\,.\,3\ldots(m-2h)}. \end{aligned}\right.$$

Se m è un numero dispari faremo $h = \frac{m - 2n - 1}{2}$ e troveremo

$$(m - h - 1)_{h-1} \frac{m}{h} 2^{m-2h-1} = \left(\frac{m + 2n - 1}{2}\right)_{2n+1} \frac{m}{m - 2n - 1} 2^{2n+1}$$

$$= \frac{(m+2n-1)(m+2n-3)\ldots(m+1)(m-1)\ldots(m-2n+3)(m-2n+1)\, m}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (2n+1)}$$

$$= \frac{m\,(m^2 - 1^2)(m^2 - 3^2)\ldots(m^2 - (2n-1)^2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (2n+1)}$$

$$= \frac{m\,(m^2 - 1^2)(m^2 - 3^2)\ldots(m^2 - (m - 2h - 2)^2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (m - 2h)};$$

talchè per m dispari avremo

$$(11) \quad \left\{ \begin{aligned} & (m - h - 1)_{h-1} \frac{m}{h} 2^{m-2h-1} \\ & = m_{2h} + m_{2h+2}(h+1)_1 + m_{2h+4}(h+2)_2 + \cdots \\ & = \frac{m\,(m^2 - 1^2)(m^2 - 3^2)\ldots(m^2 - (m - 2h - 2)^2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (m - 2h)}. \end{aligned} \right.$$

Parimente se nella formola (8) supponiamo che m sia un numero dispari e facciamo $h = \frac{m - 2n - 1}{2}$, otterremo

$$(m - h - 1)_h\, 2^{m-2h-1} = \left(\frac{m + 2n - 1}{2}\right)_{2n} 2^{2n}$$

$$= \frac{(m+2n-1)(m+2n-3)\ldots(m+1)(m-1)\ldots(m-2n+3)(m-2n+1)}{1 \cdot 2 \ldots (2n)}$$

$$= \frac{(m^2 - 1^2)(m^2 - 3^2)\ldots(m^2 - (2n-1)^2)}{1 \cdot 2 \ldots (2n)}$$

$$= \frac{(m^2 - 1^2)(m^2 - 3^2)\ldots(m^2 - (m - 2h - 2)^2)}{1 \cdot 2 \ldots (m - 2h - 1)};$$

in guisa che per m dispari si avrà

$$(12) \quad \left\{ \begin{aligned} & (m - h - 1)_h\, 2^{m-2h-1} \\ & = m_{2h+1} + m_{2h+3}(h+1)_1 + m_{2h+5}(h+2)_2 \ldots \\ & = \frac{(m^2 - 1^2)(m^2 - 3^2)\ldots(m^2 - (m - 2h - 2)^2)}{1 \cdot 2 \ldots (m - 2h - 1)}. \end{aligned} \right.$$

Finalmente se m è un numero pari si farà $h=\frac{m-2n-2}{2}$, e si troverà

$$(m-h-1)_h 2^{m-2h-1}=\left(\frac{m+2n}{2}\right)_{2n+1} 2^{m+1}$$

$$=\frac{(m+2n)(m+2n-2)\dots(m+2)m(m-2)\dots(m-2n+2)(m-2n)}{1.2\dots.(2n+1)}$$

$$=\frac{m(m^2-2^2)(m^2-4^2)\dots(m^2-(2n)^2)}{1.2\dots(2n+1)}$$

$$=\frac{m(m^2-2^2)(m^2-4^2)\dots(m^2-(m-2h-2)^2)}{1.2\dots(m-2h-1)},$$

e per conseguenza

$$(13)\quad\left\{\begin{aligned}&(m-h-1)_h 2^{m-2h-1}\\&=m_{2h+1}+m_{2h+3}(h+1)_1+m_{2h+5}(h+2)_2+\cdots\\&=\frac{m(m^2-2^2)(m^2-4^2)\dots(m^2-(m-2h-2)^2)}{1.2\dots(m-2h-1)}.\end{aligned}\right.$$

166. Aggiungiamo ancora altre quattro notevoli relazioni per i coefficienti binomiali. Indicando con m una quantità arbitraria e con n un numero intero e positivo, avremo

$$m_{2h}\left(\frac{m-2h}{2}\right)_{n-h}$$

$$=\frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-2h+1)}{1.2.3\dots(2h)}\cdot\frac{(m-2h)(m-2h-2)\dots(m-2n+2)}{2.4.6\dots(2n-2h)}$$

$$=\frac{m(m-2)(m-4)\dots(m-2n+2)}{1.3.5\dots(2h-1)}\cdot\frac{(m-1)(m-3)\dots(m-2h+1)}{2.4.6\dots(2h)}\cdot\frac{1}{2.4\dots(2n-2h)}.$$

Moltiplichiamo e dividiamo il secondo membro di questa eguaglianza per $(2h+1)(2h+3)\dots(2n-3)(2n-1)$ e facciamo

$$s=\frac{m(m-2)(m-4)\dots.(m-2n+2)}{1.3.5\dots.(2n-3)(2n-1)},$$

avremo

$$m_{2h}\left(\frac{m-2h}{2}\right)_{n-h}=s\left(\frac{m-1}{2}\right)_h\frac{(2n-1)(2n-3)\dots.(2h+1)}{2.4.6\dots.(2n-2h)}.$$

Ma il terzo fattore è uguale a $\left(\frac{2n-1}{2}\right)_{n-h}$, quindi

$$\sum_{h=0}^{h=n} m_{2h}\left(\frac{m-2h}{2}\right)_{n-h} = s\sum_{h=0}^{h=n}\left(\frac{m-1}{2}\right)_h\left(\frac{2n-1}{2}\right)_{n-h}.$$

Ora se nella formola (1) poniamo $\alpha=\frac{2n-1}{2}$, $\beta=\frac{m-1}{2}$, otterremo

$$\left(\frac{2n+m-2}{2}\right)_n = \sum_{h=0}^{h=n}\left(\frac{m-1}{2}\right)_h\left(\frac{2n-1}{2}\right)_{n-h};$$

per conseguenza la somma proposta equivale a

$$s\left(\frac{2n+m-2}{2}\right)_n$$

$$=\frac{m(m-2)(m-4)\dots(m-2n+2)}{1.3.5\dots(2n-3)(2n-1)}\cdot\frac{m(m+2)(m+4)\dots(m+2n-2)}{2.4.6\dots(2n)},$$

ovvero

$$(14)\quad\left\{\begin{aligned}&\sum_{h=0}^{h=n} m_{2h}\left(\frac{m-2h}{2}\right)_{n-h}\\&=\frac{m^2(m^2-2^2)(m^2-4^2)\dots(m^2-(2n-2)^2)}{1.2.3\dots(2n)}.\end{aligned}\right.$$

Parimente si ha

$$m_{2h+1}\left(\frac{m-2h-1}{2}\right)_{n-h}$$

$$=\frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-2h)}{1.2.3\dots(2h+1)}\cdot\frac{(m-2h-1)(m-2h-3)\dots(m-2n+1)}{2.4.6\dots(2n-2h)}$$

$$=\frac{m(m-1)(m-3)\dots(m-2n+1)}{1.3.5\dots(2h+1)}\cdot\frac{(m-2)(m-4)\dots(m-2h)}{2.4.6\dots(2h)}\cdot\frac{1}{2.4.6\dots(2n-2h)}.$$

Moltiplichiamo e dividiamo il secondo membro dell'ultima formola per $(2h+3)(2h+5)\dots(2n-1)(2n+1)$ e facciamo

$$s=\frac{m(m-1)(m-3)\dots(m-2n+1)}{1.3.5\dots(2n+1)},$$

troveremo

$$m_{2h+1}\left(\frac{m-2h\mp 1}{2}\right)_{n-h}=s\left(\frac{m-2}{2}\right)_h\frac{(2h+3)(2h+5)\ldots(2n+1)}{2.4.6\ldots(2n-2h)}.$$

Ora si ha

$$\left(\frac{2n+1}{2}\right)_{n-h}=\frac{(2n+1)(2n+1-2)\ldots(2n+1-(2n-2h)+2)}{2.4.6\ldots(2n-2h)},$$

quindi

$$\sum_{h=0}^{h=n} m_{2h+1}\left(\frac{m-2h\mp 1}{2}\right)_{n-h}=s\sum_{h=0}^{h=n}\left(\frac{m-2}{2}\right)_h\left(\frac{2n+1}{2}\right)_{n-h}.$$

Ma dalla formola (1) si vede che il fattore che moltiplica s è uguale a $\left(\frac{m+2n-1}{2}\right)_n$, e poichè

$$s\left(\frac{m+2n-1}{2}\right)_n$$

$$=\frac{m(m-1)(m-3)\ldots(m-2n+1)}{1.3.5\ldots(2n+1)}\cdot\frac{(m+1)(m+3)\ldots(m+2n-1)}{2.4.6\ldots(2n)},$$

otterremo la formola

$$(15)\quad\left\{\begin{aligned}&\sum_{h=0}^{h=n} m_{2h+1}\left(\frac{m-2h\mp 1}{2}\right)_{n-h}\\&=\frac{m(m^2-1^2)(m^2-3^2)\ldots(m^2-(2n-1)^2)}{1.2.3\ldots(2n+1)}.\end{aligned}\right.$$

Per trovare la terza formola osserviamo che

$$m_{2h}\left(\frac{m-2h-1}{2}\right)_{n-h}$$

$$=\frac{(m-1)(m-3)\ldots(m-2n+1)}{1.3\ldots(2h-1)}\cdot\frac{m(m-2)\ldots(m-2h)}{2.4\ldots(2h)}\cdot\frac{1}{2.4\ldots(2n-2h)};$$

moltiplicando e dividendo il secondo membro per

$$(2h+1)(2h+3)\ldots(2n-1);$$

si trova

$$m_{2h}\left(\frac{m-2h-1}{2}\right)_{n-h}$$

$$=\frac{m(m-1)(m-3)\ldots(m-2n+1)}{1.3\ldots(2n-1)}\cdot\left(\frac{m}{2}\right)_{2h}\left(\frac{2n-1}{2}\right)_{n-h},$$

ovvero per la formola (1)

$$\sum_{h=0}^{h=n} m_{2h}\left(\frac{m-2h-1}{2}\right)_{n-h}$$

$$=\frac{m(m-1)(m-3)\ldots(m-2n+1)}{1.3\ldots(2n-1)}\cdot\left(\frac{m+2n-1}{2}\right)_{n},$$

e sviluppando il secondo membro

$$(16)\quad\left\{\begin{aligned}&\sum_{h=0}^{h=n} m_{2h}\left(\frac{m-2h-1}{2}\right)_{n-h}\\&=\frac{(m^2-1)(m^2-3^2)\ldots(m-(2n-1)^2)}{1.2.3\ldots(2n)}\end{aligned}\right.$$

In un modo analogo si trova

$$(17)\quad\left\{\begin{aligned}&\sum_{h=0}^{h=n} m_{2h+1}\left(\frac{m-2h-2}{2}\right)_{n-h}\\&=\frac{m(m^2-2^2)(m^2-4^2)\ldots(m^2-(2n)^2)}{1.2.3\ldots(2n+1)}.\end{aligned}\right.$$

Non è inutile avvertire che l'equazioni (14) e (17) si deducono immediatamente dalle formole (10) e (13) quando m è un numero pari e che l'equazione (15) e (16) sono conseguenze delle (11) e (12) per m dispari.

Potenza di un polinomio per un esponente reale qualunque.

167. Si abbia la serie

$$1+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots,$$

che supporremo convergente indipendentemente dall'ordine dei termini e tale che l'espressione $a_1x+a_2x^2+\cdots$ sia minore di 1 anche quando per x si sostituisce il suo modulo. Se in que-

sta ipotesi poniamo $y = a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$, l'espressione $(1+y)^m$, ove m è un numero reale qualunque, sarà sviluppabile in una serie convergente indipendentemente dall' ordine dei termini, ed avremo

$$(1 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots)^m = (1 + y)^m = \sum m_n y^n.$$

Ora n essendo un numero intero e positivo, si ha (102)

$$y^n = x^n (a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + \cdots)^n$$
$$= D_{n,n} x^n + D_{n+1,n} x^{n+1} + D_{n+2,n} x^{n+2} + \cdots$$

Sostituendo questo valore nella serie precedente avremo

$$\begin{aligned}
&(1 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots)^m \\
= 1 &+ m_1 D_{1,1} x + m_1 D_{2,1} x^2 + m_1 D_{3,1} x^3 + \cdots + m_1 D_{n,1} x^n + \cdots \\
&+ m_2 D_{2,2} x^2 + m_2 D_{3,2} x^3 + \cdots + m_2 D_{n,2} x^n + \cdots \\
&+ m_3 D_{3,3} x^3 + \cdots + m_3 D_{n,3} x^n + \cdots \\
&+ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
&+ m_n D_{n,n} x^n + \cdots \\
&+ \cdots
\end{aligned}$$

Poichè questa serie doppia è convergente, potremo riunire i termini che contengono la stessa potenza di x; se quindi facciamo

$$(18) \qquad A_n = m_1 D_{n,1} + m_2 D_{n,2} + \cdots + m_n D_{n,n},$$

otterremo

$$(1 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots)^m = 1 + A_1 x + A_2 x^2 + \cdots,$$

e questa formola sussiste per qualunque valore reale di m purchè l' espressione $a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$ sia minore di 1 anche quando per x si sostituisca il suo modulo.

168. Nel caso che m sia un numero intero e positivo, la formola (18) si può dedurre direttamente dalla formola

$$A_n = \sum \frac{\Pi m}{\Pi \alpha \, \Pi \beta \, \Pi \gamma \ldots} a_0^\alpha a_1^\beta a_2^\gamma \ldots,$$

$$\alpha + \beta + \gamma + \cdots = m,$$

$$\beta + 2\gamma + 3\delta + \cdots = n,$$

che abbiamo trovato nel n° 104. Infatti si ha

$$\frac{\Pi m}{\Pi \alpha \, \Pi \beta \, \Pi \gamma \ldots} a_0^{\alpha} a_1^{\beta} a_2^{\gamma} \ldots = m_{m-\alpha} a_0^{\alpha} \cdot \frac{\Pi (m-\alpha)}{\Pi \beta \, \Pi \gamma \ldots} a_1^{\beta} a_2^{\gamma} \ldots$$

Se in questa formola lasciamo α costante e per $\beta, \gamma, \ldots$ prendiamo tutte le soluzioni intere e positive che soddisfano alle due equazioni

$$\beta + \gamma + \cdots = m - \alpha\,,$$
$$\beta + 2\gamma + \cdots = n\,,$$

avremo una somma di termini che hanno tutti per fattore $m_{m-\alpha} a^{\alpha}$, e che è data da

$$m_{m-\alpha} a_0^{\alpha} \sum \frac{\Pi (m-\alpha)}{\Pi \beta \, \Pi \gamma \ldots} a_1^{\beta} a_2^{\gamma} \ldots = m_{n-\alpha} a_0^{\alpha} D_{n, m-\alpha}\,,$$

ove le somme D si riferiscono agli elementi $a_1, a_2, \ldots$.

Per ottenere il valore di A_n è chiaro che dovremo fare la somma di tutti i termini che risultano dal precedente dando ad α i valori $m, m-1, m-2, \ldots m-n$, in guisa che avremo

$$(19) \left\{ \begin{aligned} A_n &= \sum_{\alpha=m}^{\alpha=m-n} m_{m-\alpha} a_0^{\alpha} D_{n, m-\alpha} \\ &= m_0 a_0^{m} D_{n,0} + m_1 a_0^{m-1} D_{n,1} + m_2 a_0^{m-2} D_{n,2} + \cdots + m_n a_0^{m-n} D_{n,n}\,, \end{aligned} \right.$$

ove le somme D si riferiscono agli elementi $a_1, a_2, a_3, \ldots$, e l'espressione $D_{n,0}$ è uguale a zero per tutti i valori di $n > 0$, ed è uguale a 1 per $n = 0$. La formola (18) si deduce dalla (19) facendo in quest'ultima $a_0 = 1$.

Se $a_0 = 0$, sappiamo che i coefficienti della serie che risulta dalla potenza m^{esima} di

$$a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots\,,$$

sono $A_m, A_{m+1}, A_{m+2}, \ldots$ Il valore di A_{m+n} si può dedurre facilmente dalla formola (19), osservando che in ogni termine la

somma degli indici dev'essere $m+n$ e che a_0 bisogna mutarlo in a_1; quindi troveremo

$$(20)\quad A_{m+n}=m_0 a_1^m D_{n,0}+m_1 a_1^{m-1} D_{n+1,1}+\cdots m_n a_1^{m-n} D_{2n,n},$$

ove le somme D si riferiscono agli elementi $a_2, a_3, a_4, \ldots$.

169. La formola (19) può servire a dimostrare che la formola (1), trovata pei coefficienti binomiali, ha altresì luogo pei coefficienti polinomiali. Se m è un numero intero e positivo la formola predetta si trova immediatamente moltiplicando fra loro le due serie

$$(a_0+a_1 x+a_2 x^2+\cdots)^q, \quad (a_0+a_1 x+a_2 x^2+\cdots)^{m-q};$$

ma per dimostrare la formola generale, basterà trovare questa relazione pel caso in cui la serie abbia la forma $a_1+a_2 x+a_3 x^2 \ldots$. Se ora, per maggiore chiarezza, indichiamo con A_n^m il coefficiente polinomiale che corrisponde all'esponente m e che moltiplica x^n, avremo

$$(a_1+a_2 x+a_3 x^2+\cdots)^q$$

$$=A_q^q+A_{q+1}^q x+A_{q+2}^q x^2+\cdots+A_{q+n}^q x^n+\cdots,$$

$$(a_1+a_2 x+a_3 x^2+\cdots)^{m-q}$$

$$=A_{m-q}^{m-q}+A_{m-q+1}^{m-q} x+A_{m-q+2}^{m-q} x^2+\cdots+A_{m-q+n}^{m-q} x^n+\cdots;$$

moltiplicando queste due serie fra di loro otterremo per A_{n+m}^m l'espressione

$$A_{n+m}^m=A_q^q A_{m-q+n}^{m-q}+A_{q+1}^q A_{m-q+n-1}^{m-q}+\cdots+A_{q+n}^q A_{m-q}^{m-q};$$

se in questa formola sostituiamo $n-m$ invece di n, avremo

$$A_n^m = A_q^q A_{n-q}^{m-q} + A_{q+1}^q A_{n-q-1}^{m-q} + \cdots + A_{q+n-m}^q A_{m-q}^{m-q},$$

ovvero usando le notazioni combinatorie,

$$(21)\left\{\begin{aligned} D_{n,m} &= D_{q,q} D_{n-q,m-q} + D_{q+1,q} D_{n-q-1,m-q} + \cdots + D_{q+n-m,q} D_{m-q,m-q} \\ &= \sum_{s=0}^{s=n-m} D_{q+s,q} D_{n-q-s,m-q}. \end{aligned}\right.$$

Ciò posto indicando con h e k due numeri qualunque, la formola (19) può scriversi

$$\begin{aligned} A_n^{h+k} &= (h+k)_0 a_0^{h+k} D_{n,0} + (h+k)_1 a_0^{h+k-1} D_{n,1} + \cdots (h+k)_n a_0^{h+k-n} D_{n,n} \\ &= h_0 a_0^{h+k} D_{n,0} \\ &+ (h_1 + k_1) a_0^{h+k-1} D_{n,1} \\ &+ (h_2 + h_1 k_1 + k_2) a_0^{h+k-2} D_{n,2} \\ &+ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ &+ (h_r + h_{r-1} k_1 + \cdots + k_r) a_0^{h+k-r} D_{n,r} \\ &+ (h_{r+1} + h_r k_1 + \cdots + h_1 k_r + k_{r+1}) a_0^{h+k-r-1} D_{n,r+1} \\ &+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &+ (h_n + h_{n-1} k_1 + \cdots + h_{n-r} k_r + \cdots + k_n) a_0^{h+k-n} D_{n,n} \end{aligned}$$

Se in questa espressione riuniamo i termini situati in una stessa verticale, potremo scrivere il valore di A_n^{h+k} nel seguente modo

$$A_n^{h+k} = \sum_{r=0}^{r=n} k_r [h_0 a_0^h D_{n,r} + h_1 a_0^{h-1} D_{n,r+1} + \cdots + h_{n-r} a_0^{h-n+r} D_{n,n}] a_0^{k-r}.$$

Ma dalla formola (21) si ricava

$$h_1 a_0^{h-1} D_{n,r+1} = h_1 [D_{r,r} D_{n-r,1} + D_{r+1,r} D_{n-r-1,1} + \cdots$$
$$+ D_{n-2,r} D_{2,1} + D_{n-1,r} D_{1,1}] a_0^{h-1} ,$$

$$h_2 a_0^{h-2} D_{n,r+2} = h_2 [D_{r,r} D_{n-r,2} + D_{r+1,r} D_{n-r-1,2} + \cdots + D_{n-2,r} D_{2,2}] a_0^{h-2} ,$$

$$. \quad ,$$

$$h_{n-r-1} a_0^{h-n+r+1} D_{n,n-1} = h_{n-r-1} [D_{r,r} D_{n-r,n-r-1} + D_{r+1,r} D_{n-r-1,n-r-1}] a_0^{h-n+r+1} ,$$

$$h_{n-r} a_0^{h-n+r} D_{n,n} = h_{n-r} [D_{r,r} D_{n-r,n-r}] a_0^{h-n+2} ;$$

facendo la somma di queste equazioni, avendo riguardo alla formola (19) si trova

$$h_1 a_0^{h-1} D_{n,r+1} + h_2 a_{h-2} D_{n,r+2} + \cdots + h_{n-r} a_0^{h-n+r} D_{n,n}$$

$$= D_{r,r} A_{n-r}^h + D_{r+1,r} A_{n-r-1}^h + \cdots + D_{n-2,r} A_2^h + D_{n-1,r} A_1^h .$$

Se ora osserviamo che $a_0^h = A_0^h$, vedremo che

$$A_n^{h+k} = \sum_{r=0}^{r=n} k_r [D_{r,r} A_{n-r}^h + D_{r+1,r} A_{n-r-1}^h + \cdots + D_{n-1,r} A_1^h + D_{n,r} A_0^h] a_0^{k-r}$$

$$= k_0 [D_{0,0} A_n^h + D_{1,0} A_{n-1}^h + \cdots + D_{p,0} A_{n-p}^h + \cdots + D_{n,0} A_0^h] a_0^k$$

$$+ k_1 [\qquad D_{1,1} A_{n-1}^h + \cdots + D_{p,1} A_{n-p}^h + \cdots + D_{n,1} A_0^h] a_0^{k-1}$$

$$+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+ k_p [\qquad D_{p,p} A_{n-p}^h + \cdots + D_{n,p} A_0^h] a_0^{k-p}$$

$$+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+ k_n [\qquad D_{n,n} A_0^h] a_0^{k-n}$$

$$= \sum_{p=0}^{p=n} A_{n-p}^h [k_0 a_0^k D_{p,0} + k_1 a_0^{k-1} D_{p,1} + \cdots + k_p a_0^{k-p} D_{p,p}] ,$$

ovvero per la formola (19),

$$(22)\quad \begin{cases} A_n^{h+k} = \sum_{p=0}^{p=n} A_{n-p}^h A_p^k \\ \quad = A_n^h A_0^k + A_{n-1}^h A_1^k + \cdots + A_1^h A_{n-1}^k + A_0^h A_n^k , \end{cases}$$

relazione interamente analoga a quella che ha luogo fra i coefficienti binomiali e che è espressa dalla formola (1).

La formola (22) potrebbe servire a trovare la somma della serie polinomiale, quando ne fosse già stata dimostrata la convergenza, senza bisogno di supporre conosciuta la formola del binomio; ma non crediamo di dovere insistere su questo punto.

170. Nel capitolo 4° abbiamo dato una formola che determina un coefficiente polinomiale qualunque in funzione di quelli che lo precedono nella stessa serie, quando il grado della potenza è un numero intero e positivo; una formola analoga nel caso generale potrebbe dedursi facilmente dalla (19); ma noi preferiamo trovare una formola che dà un coefficiente polinomiale relativo alla potenza $(m+1)^{esima}$ in funzione dei coefficienti corrispondenti alla potenza m^{esima}. Se m è un numero intero e positivo questa relazione si deduce immediatamente dalle formole (3) e (4) del Capitolo 1°, che possiamo scrivere

$$D_{m+n+1,m+1} = \sum_{s=0}^{s=n} a_{s+1} D_{m+n-s,m} ,$$

$$\frac{m+n+1}{m+1} D_{m+n+1,m+1} = \sum_{s=0}^{s=n} (s+1) a_{s+1} D_{m+n-s,m} .$$

Indicando con α e β due numeri arbitrari, moltiplichiamo la prima per $\alpha-\beta$, la seconda per β e sommiamo i risultati, troveremo

$$(23)\quad \left(\alpha + \frac{n\beta}{m+1}\right) D_{m+n+1,m+1} = \sum_{s=0}^{s=n} (\alpha + s\beta) a_{s+1} D_{m+n-s,m} .$$

Questa formola suppone che m sia un numero intero e posi-

tivo; per passare al caso generale ci gioveremo della formola (19), dalla quale si deducono le seguenti

$$A_n^m = m_0 a_0^m D_{n,0} + \cdots + m_h a_0^{m-h} D_{n,h} + \cdots + m_n a_0^{m-n} D_{n,n},$$

$$A_{n-1}^m = m_0 a_0^m D_{n-1,0} + \cdots + m_h a_0^{m-h} D_{n-1,h} + \cdots,$$

$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ ,$$

$$A_{h+1}^m = m_0 a_0^m D_{h+1,0} + \cdots + m_h a_0^{m-h} D_{h+1,h} + \cdots,$$

$$A_h^m = m_0 a_0^m D_{h,0} + \cdots + m_h a_0^{m-h} D_{h,h},$$

$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ ,$$

$$A_0^m = m_0 a_0^m D_{0,0}.$$

Moltiplichiamo queste eguaglianze rispettivamente per

$$\alpha a_0, (\alpha+\beta) a_1, \ldots, (\alpha+n\beta-(h+1)\beta) a_{n-h-1}, (\alpha+n\beta-h\beta) a_{n-h}, \ldots (\alpha+n\beta) a_n,$$

e facciamo la somma dei risultati, avremo

$$\alpha a_0 A_n^m + (\alpha+\beta) a_1 A_{n-1}^m + \cdots + (\alpha+n\beta) a_n A_0^m$$

$$= \sum_{h=0}^{h=n} m_h a_0^{m-h} [\alpha a_0 D_{n,h} + (\alpha+\beta) a_1 D_{n-1,h} + \cdots + (\alpha+n\beta-h\beta) a_{n-h} D_{h,h}].$$

Ora se nella formola (23) facciamo $m=h$, e sostituiamo $n-h-1$ per n e $\alpha+\beta$ per α, troveremo

$$\left(\alpha+\frac{n\beta}{h+1}\right) D_{n,h+1} = \sum_{s=0}^{s=n-h-1} (\alpha+\beta+s\beta) a_{s+1} D_{n-1-s,h};$$

quindi

$$\alpha a^0 A_n^m + (\alpha+\beta) a_1 A_{n-1}^m + \cdots + (\alpha + n\beta) a_n A_0^m$$

$$= \sum_{h=0}^{h=n} m_h a_0^{m-h} \left[\alpha a_0 D_{n,h} + \left(\alpha + \frac{n\beta}{h+1}\right) D_{n,h+1} \right]$$

$$= \sum_{h=1}^{h=n} \left[\alpha m_h + \left(\alpha + \frac{n\beta}{h}\right) m_{h-1} \right] a_0^{m-h+1} D_{n,h}$$

$$= \sum_{h=1}^{h=n} \left[\alpha (m_h + m_{h-1}) + \frac{n\beta}{h} m_{h-1} \right] a_0^{m-h+1} D_{n,h}$$

$$= \left(\alpha + \frac{n\beta}{m+1}\right) \sum_{h=1}^{h=n} (m+1)_h a_0^{m-h+1} D_{n,h} .$$

Ma per la formola (19) si ha

$$\sum_{h=1}^{h=n} (m+1)_h a_0^{m-h+1} D_{n,h} = A_n^{m+1},$$

laonde

$$(24) \quad \left\{ \begin{aligned} & \left(\alpha + \frac{n\beta}{m+1}\right) A_n^{m+1} \\ & = \alpha a_0 A_n^m + (\alpha+\beta) a_1 A_{n-1}^m + \cdots + (\alpha + n\beta) a_n A_0^m, \end{aligned} \right.$$

che è la formola che cercavamo. Se facciamo $\alpha = -n$, $\beta = m+1$, troveremo l'equazione che abbiamo dato nel n° (103).

171. Terminiamo queste considerazioni generali sulla serie polinomiale, osservando che l'equazione (19) si può trasformare sostituendo in essa per $D_{n,h}$ l'espressione

$$D_{n,h} = \Sigma \frac{\Pi h}{\Pi\beta \, \Pi\gamma \ldots} a_1^\beta a_2^\gamma \ldots ;$$

che moltiplicata per $m_h a_0^{m-h}$, dà

$$m_h a_0^{m-h} D_{n,h} = \Sigma \frac{m(m-1)\ldots(m-h+1)}{\Pi\beta \, \Pi\gamma \ldots} a_0^{m-h} a_1^\beta a_2^\gamma \ldots$$

Il valore di A_n si deduce dall'ultima espressione cercando i valori interi e positivi di β, γ, ... che soddisfanno l'equazione

$$\beta + 2\gamma + \cdots = n,$$

e determinando poi il valore h mediante l'equazione

$$\beta+\gamma+\cdots=h.$$

172. Per mostrare l'utilità delle formole precedenti, proponiamoci di sviluppare in serie l'espressione

$$[(1+x^2)^{\frac{1}{2}}+1]^m .$$

Si ha

$$(1+x^2)^{\frac{1}{2}}=\sum_{n=1}^{n=\infty}\left(\frac{1}{2}\right)_n x^{2n}$$

quindi

$$[(1+x)^{\frac{1}{2}}+1]^m$$
$$=\left[2+\left(\frac{1}{2}\right)_1 x^2+\left(\frac{1}{2}\right)_2 x^4+\left(\frac{1}{2}\right)_3 x^6+\cdots\right]^m=\Sigma A_n x^n.$$

In questo caso

$$a_0=2,\ a_n=\left(\frac{1}{2}\right)_n=(-1)^{n-1}\frac{1.3\ldots(2n-3)}{1.2\ldots.n}\frac{1}{2^n},$$

per conseguenza la formola (24) diventa

$$\left(\alpha+\frac{n\beta}{m+1}\right)A_n^{m+1}$$
$$=2\alpha A_n^m+(\alpha+\beta)\left(\frac{1}{2}\right)_1 A_{n-1}^m+(\alpha+2\beta)\left(\frac{1}{2}\right)_2 A_{n-2}^m+\cdots+(\alpha+n\beta)\left(\frac{1}{2}\right)_n A_0^m.$$

Da questa equazione facendo una volta $\alpha=-1$, $\beta=2$, e un'altra volta $\alpha=0$, $\beta=2$, $n=n+1$, si ricavano le seguenti

$$\frac{2n-m-1}{m+1}A_n^{m+1}$$
$$=-2A_n^m+\left(\frac{1}{2}\right)_1 A_{n-1}^m+3\left(\frac{1}{2}\right)_2 A_{n-2}^m+\cdots+(2n-1)\left(\frac{1}{2}\right)_n A_0^m,$$

$$\frac{2n+2}{m+1}A_{n+1}^{m+1}=A_n^m-\left(\frac{1}{2}\right)_1 A_{n-1}^m-3\left(\frac{1}{2}\right)_2 A_{n-2}^m-\cdots-(2n-1)\left(\frac{1}{2}\right)_n A_0^m,$$

le quali sommate insieme danno

$$-A_n^m = \frac{2n-m-1}{m+1} A_n^{m+1} + \frac{2n+2}{m+1} A_{n+1}^{m+1},$$

ovvero, ponendo $m-1$ per m e $n-1$ per n,

$$A_n^m = -\frac{m}{2n} A_{n-1}^{m-1} + \frac{m+2-2n}{2n} A_{n-1}^m. \tag{25}$$

Ora poichè si ha $A_0^m = 2^m$, dalla formola precedente ricaveremo

$$A_1^m = -\frac{m}{2} A_0^{m-1} + \frac{m}{2} A_0^m = m\, 2^{m-1},$$

$$A_2^m = -\frac{m}{4} A_1^{m-1} + \frac{m-2}{4} A_1^m = \frac{m}{2}(m-3)_1\, 2^{m-4},$$

$$A_3^m = -\frac{m}{6} A_2^{m-1} + \frac{m-4}{6} A_2^m = \frac{m}{3}(m-4)_2\, 2^{m-6},$$

Supponiamo che la legge che si mostra nei valori precedenti sia stata già verificata sino all' indice $(n-1)^{esimo}$, cioè che si abbia

$$A_{n-1}^m = \frac{m}{n-1}(m-n)_{n-2}\, 2^{m-2n+2};$$

la formola (25) darà

$$A_n^m = -\frac{m}{2n} \cdot \frac{m-1}{n-1}(m-n-1)_{n-2}\, 2^{m-2n+1}$$

$$+ \frac{m+2-2n}{2n} \cdot \frac{m}{n-1}(m-n)_{n-2}\, 2^{m-2n+2}.$$

Ma

$$(m-2n+2)(m-n)_{n-2} = (m-n)(m-n-1)_{n-2},$$

quindi

$$A_n^m = \frac{m(m-2n+1)}{n(n-1)}(m-n-1)_{n-2}\, 2^{m-2n},$$

ovvero

$$A_n^m = \frac{m}{n}(m-n-1)_{n-1} 2^{m-2n}.$$

Dunque, poichè la legge indicata da questa formola è stata verificata per $n=2$, $n=3$, sussisterà in generale ed avremo

$$[(1+x)^{\frac{1}{2}}+1]^m$$

$$= 2^m + m\,2^{m-2} x^2 + \frac{m}{2}(m-3)_1 2^{m-4} x^4 + \frac{m}{3}(m-4)_2 2^{m-6} x^6 + \cdots.$$

Questa eguaglianza ha luogo per tutti quei valori di x pei quali la serie $\Sigma \left(\frac{1}{2}\right)_n x^{2n}$ anche prendendo tutti i termini positivi, è minore dell'unità.

173. Come secondo esempio, cerchiamo il valore di A_n^m nella serie

$$\left[\Sigma \frac{x^n}{\Pi(n+1)}\right]^m = \Sigma A_n^m x^n.$$

A tal fine potremo giovarci di una qualunque fra le formole trovate nei numeri precedenti. Se per es.: nella formola (24) facciamo $\beta=1$, avremo per determinare un coefficiente qualunque relativo all'esponente $m+1$ in funzione dei coefficienti relativi all'esponente m, l'eguaglianza

$$(26)\qquad A_n^{m+1} = A_n^m + a_1 A_{n-1}^m + a_2 A_{n-2}^m + \cdots + a_n A_0^m,$$

da cui, osservando che $a_n = \frac{1}{\Pi(n+1)}$, ricaveremo

$$A_n^{m+1} = A_n^m + \frac{1}{1.2} A_{n-1}^m + \frac{1}{1.2.3} A_{n-2}^m + \cdots + \frac{1}{1.2..(n+1)} A_0^m.$$

Se m è un numero intero e positivo, da questa formola si

può dedurre il valore generale di A_n^m. Infatti per $m = 1$ e per $m = 2$, si trova facilmente

$$A_n^2 = \frac{2^{n+2} - 2}{\Pi(n+2)}, \quad A_n^3 = \frac{3^{n+3} - (3)_1 2^{n+3} + (3)_2}{\Pi(n+3)};$$

se la legge che già apparisce da queste due formole, la supponiamo verificata sino all'esponente m^{esimo}, cioè se supponiamo che si abbia

$$(27)\quad A_n^m = \frac{m^{n+m} - m_1(m-1)^{n+m} + m_2(m-2)^{n+m} - \dots (-1)^{m-1} m_{m-1}}{\Pi(n+m)},$$

potremo vedere che questa legge ha luogo altresì per l'esponente $(m+1)^{esimo}$ nel seguente modo.

Se sostituiamo nel valore di A_n^{m+1} per A_n^m, A_{n-1}^m, A_{n-2}^m ..., A_0^m l'espressioni che si deducono dall'ultima formola, vedremo facilmente che il valor di A_n^{m+1} si può scrivere

$$A_n^{m+1} = \sum_{p=0}^{p=m-1} \sum_{q=0}^{q=m} (-1)^{p-1} \frac{m_p (m-p)^{n+m-q}}{\Pi(n+m-q)\,\Pi(q+1)},$$

ovvero

$$A_n^{m+1} = \frac{1}{\Pi(n+m+1)} \sum_{p=0}^{p=m-1} (-1)^p m_p \sum_{q=0}^{q=n} (m+n+1)_{q+1} (m-p)^{n+m-q},$$

poichè si ha

$$\Pi(n+m-q)\,\Pi(q+1) = \frac{\Pi(n+m+1)}{(m+n+1)_{q+1}}.$$

Inoltre per la formola del binomio abbiamo

$$(m-p+1)^{n+m+1} = \sum_{q=0}^{q=n+m+1} (m+n+1)_q (m-p)^{n+m+1-q}$$

$$= (m-p)^{n+m+1} + \sum_{q=0}^{q=n} (m+n+1)_{q+1} (m-p)^{n+m-q}$$

$$+ \sum_{q=n+1}^{q=n+m} (m+n+1)_{q+1} (m-p)^{n+m-q};$$

quindi se facciamo

$$H = \sum_{p=0}^{p=m-1} (-1)^p m_p \left[(m-p+1)^{n+m+1} - (m-p)^{n+m+1}\right]$$

$$K = \sum_{p=0}^{p=m-1} (-1)^p m_p \left[(m+n+1)_0 + (m+n+1)_1 (m-p) + \cdots + (m+n+1)_{m-1} (m-p)^{m-1}\right]$$

$$= \sum_{p=0}^{p=m-1} \sum_{h=0}^{h=m-1} (-1)^p m_p (m+n+1)_h (m-p)^h ;$$

avremo

$$A_n^{m+1} = \frac{H-K}{\Pi(n+m+1)} .$$

Al valore di H, avuto riguardo alla relazione $(m+1)_n = m_n + m_{n-1}$, si può dare la forma

$$H = \sum_{p=0}^{p=m-1} (-1)^p (m+1)_p (m-p+1)^{n+m+1} + (-1)^m m.$$

Il valore di K si può scrivere

$$K = \sum_{h=0}^{h=m-1} (m+n+1)_h \sum_{p=0}^{p=m-1} (-1)^p m_p (m-p)^h ;$$

ora osserviamo che

$$m_p (m-p) = m\, m_p - m(m-1)_{p-1} ,$$

avendo riguardo alla formola $m_p = \frac{m}{p}(m-1)_{p-1}$; laonde

$$\sum_{p=0}^{p=m-1} (-1)^p m_p (m-p)^h$$

$$= m \sum_{p=0}^{p=m-1} (-1)^p m_p (m-p)^{h-1} + m \sum_{p=0}^{p=m-1} (-1)^{p-1} (m-1)_{p-1} (m-p)^{h-1} .$$

Ma il primo membro, per una nota proprietà dei coefficienti binomiali, è uguale a $(-1)^{m+1}$ per $h=0$; quindi se nella formola

precedente facciamo $h=1, 2, \ldots m-1$, troveremo che l'espressione $\sum_{p=0}^{p=m-1}(-1)^p m_p (m-p)^h$ è uguale a $(-1)^{m+1}$ per $h=0$ e a zero per tutti gli altri valori di h, talchè avremo

$$K=(-1)^{m+1}.$$

Sostituendo nel valore di A_n^{m+1} per H e K l'espressioni corrispondenti, otterremo

$$A_n^{m+1}=\frac{1}{\Pi(n+m+1)}\sum_{p=0}^{p=m}(-1)^p(m+1)_p(m-p+1)^{n+m+1},$$

la quale formola si deduce da quella ottenuta per A_n sostituendo $m+1$ per m.

Un'altra relazione fra i coefficienti A, si deduce dalla stessa formola (24) facendo in essa una volta $\alpha=\beta=1$, ed un'altra volta sostituendo $n-1$ per n, 1 per α e 0 per β, avremo

$$\frac{n+m+1}{m+1}A_n^{m+1}=A_n^m+A_{n-1}^m+\frac{1}{1.2}A_{n-2}^m+\cdots+\frac{1}{1.2\ldots n}A_0^m,$$

$$A_{n-1}^{m+1}=\qquad A_{n-1}^m+\frac{1}{1.2}A_{n-2}^m+\cdots+\frac{1}{1.2\ldots n}A_0^m,$$

dalle quali si ricava

$$A_n^{m+1}=\frac{m+1}{n+m+1}[A_n^m+A_{n-1}^{m+1}].$$

Da questa formola, se m è un numero intero e positivo, si deduce per A_n^m l'espressione

$$A_n^m=\frac{C_n}{(m+1)(m+2)\ldots(m+n)}, \tag{28}$$

ove C_n rappresenta la somma delle combinazioni con ripetizione della classe n^{esima} degli elementi $1, 2, 3, \ldots m$. La dimostrazione di questa formola la lasciamo come esercizio al lettore.

Per trovare il valore di A_n^m indipendentemente dagli altri, anche se m è un numero reale qualunque, faremo

$$\alpha = -n, \ \beta = m+1,$$

nella formola (24), e troveremo

$$A_n^m = m_n(m-n-1)_0 A_n^n - m_{n-1}(m-n)_1 A_n^{n-1} + m_{n-2}(m-n+1)_2 A_n^{n-2}$$

$$-\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$+(-1)^{n-1} m_1 (m-2)_{n-1} A_n^1.$$

Siccome n è un numero intero, sostituendo in questa eguaglianza per A_n^n, A_n^{n-1}, ... A_n^1 i valori che si deducono o dalla formola (27) o dalla formola (28) otterremo due nuove relazioni per determinare A_n^m.

Tralasciando d'insistere su questo argomento, consideriamo il caso in cui $m = -1$, che è meritevole di essere notato. I valori dei coefficienti della serie $\sum A_n^{-1} x^n$ si deducono facilmente dalla formola

$$A_n^{-1} = -a_1 A_{n-1}^{-1} - a_2 A_{n-2}^{-1} - a_3 A_{n-3}^{-1} - \dots - a_n A_n^{-1},$$

che risulta dalla (26). Poichè $A_0^{-1} = 1$, si vede facilmente che

$$A_1^{-1} = -\frac{1}{2}, \ A_2^{-1} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2}, \ A_3^{-1} = 0, \ A_4^{-1} = -\frac{1}{30} \cdot \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4},$$

$$A_5^{-1} = 0, \ A_6^{-1} = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}, \text{ ec.}$$

In generale si vede che A_n^{-1} è uguale a zero per tutti i valori dispari di $n > 1$. Pei valori pari di $n \geq 2$, i coefficienti con-

tengono come fattori i numeri $\frac{1}{6}, \frac{1}{30}, \frac{1}{42}, \ldots$ che sono conosciuti col nome di *numeri Bernoulliani* e s'indicano con B_1, B_3, B_5, ...; quindi avremo

$$\left(1 + \frac{x}{1\,.\,2} + \frac{x^2}{1\,.\,2\,.\,3} + \cdots\right)^{-1}$$

$$= 1 - \frac{1}{2}\,x + \frac{B_1}{2}\,x^2 - \frac{B_3}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}\,x^4 + \frac{B_5}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5\,.\,6}\,x^6 - \cdots$$

Questa formola sussiste per tutti i valori positivi di x che rendono la serie

$$\frac{x}{1\,.\,2} + \frac{x^2}{1\,.\,2\,.\,3} + \cdots,$$

minore dell'unità. [1].

---

[1] Che la quantità A_n^{-1} debba essere eguale a zero per tutti i valori dispari di $n > 1$, risulta immediatamente dall'osservazione che il primo membro dell'ultima eguaglianza, come può vedersi nel Capitolo seguente, ha per somma $\frac{x}{e^x - 1}$; infatti l'espressione

$$\frac{x}{e^x - 1} + \frac{1}{2}\,x = \frac{x}{2}\,\frac{e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}}$$

non cambia di valore mutando il segno di x, quindi lo stesso dovendo accadere per la serie corrispondente, questa serie non potrà contenere potenze dispari di x.

CAPITOLO VIII.

SERIE ESPONENZIALE E LOGARITMICA.

Convergenza della serie esponenziale.

174. *La serie*

$$(1) \qquad 1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1\,.\,2}+\frac{x^3}{1\,.\,2\,.\,3}+\cdots\ ,$$

è convergente indipendentemente dall'ordine dei termini per qualunque valore reale o complesso di x, *cioè in tutta l'estensione del piano.*

Infatti la serie dei moduli è convergente per qualunque valore di x, poichè il rapporto di due termini consecutivi ha per limite zero.

La serie (1) si chiama *esponenziale* perchè, come vedremo, ha per somma la funzione esponenziale e^x.

Somma della serie esponenziale.

175. *Per qualunque valore reale o complesso di* x, *sussiste l'eguaglianza*

$$(2) \qquad \lim_{m=\infty}\left(1+\frac{x}{m}\right)^m=1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1\,.\,2}+\frac{x^3}{1\,.\,2\,.\,3}+\cdots.$$

Facciamo

$$S=1+x+\frac{1}{1\,.\,2}x^2+\frac{1}{1\,.\,2\,.\,3}x^3+\cdots+\frac{1}{1\,.\,2\ldots(n-1)}x^{n-1}+R_n,$$

e consideriamo la serie binomiale

$$\left(1+\frac{x}{m}\right)^m=1+x+\frac{1-\frac{1}{m}}{1\,.\,2}x^2+\frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)}{1\,.\,2\,.\,3}x^3+\cdots$$

$$+\frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)\ldots\left(1-\frac{n-2}{m}\right)}{1\,.\,2\,.\ldots(n-1)}x^{n-1}+R'_n,$$

ove m è un numero intero e positivo e R'_n indica la somma dei termini che seguono l'ennesimo.

La serie S essendo convergente per qualunque valore finito di x, potremo sempre scegliere il numero n talmente grande che R_n differisca da zero tanto poco quanto si vuole. Se ora osserviamo che le quantità

$$1-\frac{1}{m},\ \left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right),\ldots.$$

sono tutte minori di 1, qualunque valore abbiano m ed n, è chiaro che i moduli dei termini della seconda serie sono minori dei moduli dei termini corrispondenti della prima; quindi a più forte ragione potremo trovare un valore di n così grande pel quale R'_n risulti minore di una quantità arbitrariamente piccola, indipendentemente dal valore che poi si può attribuire a m. (1)

(1) Che per valori grandissimi di n si possa rendere R'_n piccolo quanto si vuole, si dimostra direttamente nel seguente modo. Si ha

$$R'_n=\frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{m}\right)}{1\,.\,2\ldots.n}x^n\left[1+\frac{1-\frac{n}{m}}{n+1}x+\frac{\left(1-\frac{n}{m}\right)\left(1-\frac{n+1}{m}\right)}{(n+1)(n+2)}x^2+\cdots\right];$$

quindi indicando con ρ il modulo di x, avremo

$$mod\,R'_n\leq\frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{m}\right)}{1\,.\,2\ldots n}\rho^n\left[1+\frac{1-\frac{n}{m}}{n+1}\rho+\frac{\left(1-\frac{n}{m}\right)\left(1-\frac{n+1}{m}\right)}{(n+1)(n+2)}\rho^2+\cdots\right]$$

$$<\frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{m}\right)}{1\,.\,2\ldots.n}\rho^n\left[1+\frac{\rho}{n}+\left(\frac{\rho}{n}\right)^2+\cdots+\left(\frac{\rho}{n}\right)^{m-n}\right]$$

$$=\frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{m}\right)}{1\,.\,2\ldots.n}\rho^n\,\frac{1-\left(\frac{\rho}{n}\right)^{m-n+1}}{1-\frac{\rho}{n}}.$$

Ciò posto se noi nella seconda formola diamo ad n un valore fisso, ma grandissimo, e poi facciamo crescere indefinitamente m, i primi n termini della seconda serie convergeranno verso i termini corrispondenti della prima, in guisa che avremo

$$S - lim\left(1+\frac{x}{m}\right)^m = R_n - R''_n,$$

ove R''_n indica ciò che diventa R'_n per $m=\infty$; ma la quantità $R_n - R''_n$ si può prendere arbitrariamente piccola, quindi si ha

$$lim\left(1+\frac{x}{m}\right)^m = S = 1 + x + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \cdots.$$

176. Nel caso in cui x è una variabile reale, si può mostrare facilmente che la formola (2) sussiste non solo per valori interi e positivi ma anche per qualunque valore reale di m. In-

---

Laonde se supponiamo $n > \rho$ e indichiamo con k un numero positivo minore dell'unità, potremo fare

$$mod\, R'_n = \frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{m}\right)\rho^n}{1.2\ldots.n}\frac{k}{1-\frac{\rho}{n}}$$

Ora osserviamo che il prodotto $\left(1-\frac{1}{m}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{m}\right)$, che è compreso fra 1 e $\left(1-\frac{n-1}{m}\right)^{n-1}$ non può mai superare l'unità qualunque valore abbiano m ed n, purchè n sia $< m$, e che la quantità $\frac{k}{1-\frac{\rho}{n}}$ converge al crescere di n verso $k<1$. Inoltre si ha

$$\frac{\rho^n}{1.2\ldots.n} = \frac{\rho^h}{1.2\ldots.h}\cdot\frac{\rho^{n-h}}{(h+1)(h+2)\ldots.n} < \frac{\rho^h}{1.2\ldots.h}\left(\frac{\rho}{h+1}\right)^{n-h},$$

ove h è un numero intero compreso fra ρ e n; ma la quantità $\left(\frac{\rho}{h+1}\right)^{n-h}$ si può rendere piccola quanto si vuole col crescere di n, l'espressione $\frac{\rho^h}{1.2\ldots.h}$ è finita ed indipendente da n; quindi $\frac{\rho^n}{1.2\ldots.n}$ si può far differire da zero tanto poco quanto si vuole; e per conseguenza lo stesso accade di $mod\, R'_n$.

fatti, supponiamo in prima che m sia un numero positivo compreso fra due interi consecutivi h e $h+1$; avremo per x positivo

$$\left(1+\frac{x}{h}\right)^{h+1}>\left(1+\frac{x}{m}\right)^{m}>\left(1+\frac{x}{h+1}\right)^{h},$$

e per x negativo

$$\left(1+\frac{x}{h}\right)^{h+1}<\left(1+\frac{x}{m}\right)^{m}<\left(1+\frac{x}{h+1}\right)^{h};$$

quindi per qualunque valore reale di x, $\left(1+\frac{x}{m}\right)^{m}$ è compreso fra

$$\left(1+\frac{x}{h}\right)^{h}\left(1+\frac{x}{h}\right) \quad \text{e} \quad \frac{\left(1+\frac{x}{h+1}\right)^{h+1}}{\left(1+\frac{x}{h+1}\right)};$$

talchè per m ed h infiniti avremo

$$\lim\left(1+\frac{x}{m}\right)^{m}=\lim\left(1+\frac{x}{h}\right)^{h}=\lim\left(1+\frac{x}{h+1}\right)^{h+1}.$$

Se finalmente osserviamo che per m positivo, si ha

$$\left(1-\frac{x}{m}\right)^{-m}=\left(1+\frac{x}{m-x}\right)^{m}=\left(1+\frac{x}{m-x}\right)^{m-x}\left(1+\frac{x}{m-x}\right)^{x},$$

da cui

$$\lim\left(1-\frac{x}{m}\right)^{-m}=\lim\left(1+\frac{x}{m-x}\right)^{m-x},$$

vedremo che, quando x è una variabile reale, la formola (2) sussiste per qualunque reale di m.

177. Nell'ipotesi sempre di una variabile reale è facile trovare il valore del primo membro della formola (2); infatti se in questa formola facciamo $x=1$, troveremo

$$\lim\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}=2+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\cdots$$

ovvero (116)

$$lim\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = e.$$

Sostituendo in questa eguaglianza $\frac{m}{x}$ per m, otterremo

$$lim\left(1+\frac{x}{m}\right)^{\frac{m}{x}} = e ,$$

da cui

$$\left(1+\frac{x}{m}\right)^{\frac{m}{x}} = e + \delta ,$$

ove δ indica una quantità che converge a zero al crescere di n. Dall' ultima formola si deduce

$$\left(1+\frac{x}{m}\right)^m = (e+\delta)^x ,$$

e passando al limite

(3) $$lim\left(1+\frac{x}{m}\right)^m = e^x.$$

Quindi avremo

(4) $$e^x = \Sigma \frac{x^n}{1 \cdot 2 \ldots n}.$$

Se supponiamo che l' eguaglianza (3) sussista anche per valori complessi di x, potremo dire che la formola (4) ha luogo per qualunque valore reale o complesso di x.

Indicando con l i logaritmi corrispondenti alla base e, i quali si distinguono col nome di *naturali* o *neperiani*, e sostituendo nell' ultima formola $x\,la$ invece di x, ove a è un numero positivo qualunque, avremo per x reale

$$a^x = \Sigma \frac{(l\,a)^n x^n}{1 \cdot 2 \ldots n}.$$

Funzione esponenziale di una variabile complessa.

178. *La funzione esponenziale* e^x *è una funzione continua di* x, poichè è sviluppabile in una serie che procede secondo le potenze intere e positive di x.

La funzione esponenziale di una variabile complessa $x+iy$ si può esprimere per mezzo delle funzioni circolari. Poniamo infatti

$$1+\frac{x}{m}=r\cos\omega,\quad \frac{y}{m}=r\,\mathrm{sen}\,\omega\ ,$$

da cui

$$r=\sqrt{1+\frac{2x}{m}+\frac{x^2+y^2}{m^2}}\ ,\quad \tan\omega=\frac{\frac{y}{m}}{1+\frac{x}{m}}\ ;$$

indicando con φ il più piccolo arco che ha la stessa tangente di ω, avremo

$$\varphi=\mathrm{arc}\tan\frac{\frac{y}{m}}{1+\frac{x}{m}}\ ,\quad \omega=\varphi+k\pi\ ,$$

ove k è un numero intero qualunque positivo o negativo; quindi

$$1+\frac{x+iy}{m}=r\left[\cos(\varphi+k\pi)+i\,\mathrm{sen}(\varphi+k\pi)\right].$$

Per determinare k, osserviamo che facendo $x=y=0$, avremo $r=1$, $\varphi=0$, e per conseguenza

$$1=\cos k\pi+i\,\mathrm{sen}\,k\pi=\cos k\pi\ ,$$

da cui segue che k dev'essere un numero pari; talchè

$$1+\frac{x+iy}{m}=r(\cos\varphi+i\,\mathrm{sen}\,\varphi)\ ,$$

e $$e^{x+iy} = lim\,[r^m(\cos m\varphi + i\,sen\,m\varphi)].$$

Ora si ha

$$lim\,(r^m) = lim\left[1 + \frac{2x}{m} + \frac{x^2+y^2}{m^2}\right]^{\frac{m}{2}};$$

posto $\delta = \frac{2x}{m} + \frac{x^2+y^2}{m^2}$, δ sarà una quantità che converge a zero al crescere di m, ed avremo

$$lim\,(r^m) = lim\,(1+\delta)^{\frac{m}{2}} = lim\left[(1+\delta)^{\frac{1}{\delta}}\right]^{\frac{m\delta}{2}} = e^x,$$

poichè

$$lim\,(1+\delta)^{\frac{1}{\delta}} = e \quad e \quad lim\,\frac{m\delta}{2} = x.$$

Inoltre si ha

$$m\varphi = \frac{\varphi}{\tan\varphi}\cdot m\tan\varphi = \frac{\varphi}{\tan\varphi}\cdot\frac{y}{1+\frac{x}{m}},$$

da cui

$$lim\,(m\varphi) = y.$$

Quindi

$$e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\,sen\,y).$$

Se in questa formola facciamo $x = 0$, troveremo

$$e^{iy} = \cos y + i\,sen\,y;$$

lo che mostra che un numero complesso $\rho(\cos\theta + i\,sen\,\theta)$ si può sempre porre sotto la forma $\rho\,e^{i\theta}$.

Se supponiamo che l'equazione $lim\left[1 + \frac{x\,l\,a}{m}\right]^m = a^x$ dimostrata vera quando x è una variabile reale, sussiste altresì se per x si sostituisce la variabile complessa $x + iy$, troveremo in un modo analogo

$$a^{x+iy} = a^x[\cos(y\,l\,a) + i\,sen\,(y\,l\,a)].$$

Questa equazione può servire a dimostrare che il teorema espresso dall'eguaglianza $a^m . a^n = a^{m+n}$, è vero anche se m ed n sono numeri complessi; infatti si ha

$$a^{x+iy} . a^{x'+iy'} = a^{x+x'}[\cos(y+y') la + i \operatorname{sen}(y+y') la] = a^{x+x'+i(y+y')}.$$

Nuove serie che si possono dedurre dalla serie esponenziale.

179. La formola

$$e^x (\cos y + i \operatorname{sen} y) = 1 + \frac{x+iy}{1} + \frac{(x+iy)^2}{1 . 2} + \ldots$$

si può trasformare utilmente ponendo

$$x = z \cos\theta \quad \text{e} \quad y = z \operatorname{sen}\theta ;$$

allora avremo

$$e^{z\cos\theta}[\cos(z \operatorname{sen}\theta) + i \operatorname{sen}(z \operatorname{sen}\theta)] = \Sigma\, z^n \frac{(\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta)}{1 . 2 \ldots n},$$

la quale equazione si risolve nelle due

$$e^{z\cos\theta} \cos(z \operatorname{sen}\theta) = \Sigma \frac{z^n}{1 . 2 \ldots n} \cos n\theta ,$$

$$e^{z\cos\theta} \operatorname{sen}(z \operatorname{sen}\theta) = \Sigma \frac{z^n}{1 . 2 \ldots n} \operatorname{sen} n\theta.$$

Se in queste equazioni poniamo $\theta = \frac{\pi}{2}$, otterremo

$$\cos z = \Sigma (-1)^n \frac{z^{2n}}{1 . 2 \ldots (2n)},$$

$$\operatorname{sen} z = \Sigma (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{1 . 2 \ldots (2n+1)},$$

poichè si ha

$$\cos\left(2n . \frac{\pi}{2}\right) = (-1)^n, \quad \cos(2n+1)\frac{\pi}{2} = 0,$$

$$\operatorname{sen}\left(2n . \frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad \operatorname{sen}(2n+1)\frac{\pi}{2} = (-1)^n.$$

Dalle medesime formole si deducono pure agevolmente le seguenti

$$\frac{e^{z\cos\theta}+e^{-z\cos\theta}}{2}\cos(z\,sen\,\theta)=\Sigma\frac{z^{2n}}{\Pi(2n)}\cos 2n\theta\ ,$$

$$\frac{e^{z\cos\theta}-e^{-z\cos\theta}}{2}\cos(z\,sen\,\theta)=\Sigma\frac{z^{2n+1}}{\Pi(2n+1)}\cos(2n+1)\theta\ ,$$

$$\frac{e^{z\cos\theta}+e^{-z\cos\theta}}{2}sen(z\,sen\,\theta)=\Sigma\frac{z^{2n+1}}{\Pi(2n+1)}sen(2n+1)\theta\ ,$$

$$\frac{e^{z\cos\theta}-e^{-z\cos\theta}}{2}\cos(z\,sen\,\theta)=\Sigma\frac{z^{2n}}{\Pi(2n)}sen\,2n\theta.$$

Somme delle potenze intere dei numeri naturali.

180. La serie esponenziale si applica utilmente alla ricerca delle somme delle potenze intere dei numeri naturali.

Infatti sommando l'equazioni

$$e^{x}=1+x+\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^3}{1.2.3}+\cdots+\frac{x^m}{1.2\ldots m}+\cdots,$$

$$e^{2x}=1+2x+2^2\frac{x^2}{1.2}+2^3\frac{x^3}{1.2.3}+\cdots+2^m\frac{x^m}{1.2\ldots m}+\cdots,$$

$$e^{3x}=1+3x+3^2\frac{x^2}{1.2}+3^3\frac{x^3}{1.2.3}+\cdots+3^m\frac{x^m}{1.2\ldots m}+\cdots,$$

. . . . ,

$$e^{nx}=1+nx+n^2\frac{x^2}{1.2}+n^3\frac{x^3}{1.2.3}+\cdots+n^m\frac{x^m}{1.2\ldots m}+\cdots,$$

e facendo

$$\Sigma n^m=1^m+2^m+3^m+\cdots+n^m\ ,$$

troveremo

$$\frac{e^{nx}-1}{1-e^{-x}}=n+x\Sigma n+\frac{x^2}{1.2}\Sigma n^2+\frac{x^3}{1.2.3}\Sigma n^3+\cdots+\frac{x^m}{1.2\ldots m}\Sigma n^m+\cdots$$

Ma si ha

$$e^{nx}-1=x\left(n+\frac{n^2}{2}x+\frac{n^3}{3}\frac{x^2}{1.2}+\cdots+\frac{n^{m+1}}{m+1}\frac{x^m}{1.2\ldots m}+\cdots\right),$$

$$\frac{x}{1-e^{-x}}=1+\frac{1}{2}x+B_1\frac{x^2}{1.2}-B_3\frac{x^4}{1.2.3.4}+\cdots+(-1)^{m-1}B_{2m-1}\frac{x^{2m}}{1.2\ldots(2m)},$$

ove la seconda formola, che è stata trovata nel n° 173, sussiste pei soli valori positivi di x che rendono la serie $\frac{x}{1.2}+\frac{x^2}{1.2.3}+\cdots$ minore di 1; quindi avremo identicamente per tutti i valori di x che soddisfano alla condizione predetta

$$n+x\sum n+\frac{x^2}{1.2}\sum n^2+\frac{x^3}{1.2.3}\sum n^3+\cdots+\frac{x^m}{1.2\ldots m}\sum n^m+\cdots$$

$$=\left(n+\frac{n^2}{2}x+\frac{n^3}{3}\frac{x^2}{1.2}+\cdots+\frac{n^{m+1}}{m+1}\frac{x^m}{1.2\ldots m}+\cdots\right)\times$$

$$\left(1+\frac{1}{2}x+B_1\frac{x^2}{1.2}-\cdots+(-1)^{m-n}B_{2m-3}\frac{x^{2(m-1)}}{1.2..(2m-2)}+\cdots\right);$$

ovvero

$$n+x\Sigma n+\frac{x^2}{\Pi 2}\Sigma n^2+\frac{x^3}{\Pi 3}\Sigma n^3+\cdots+\frac{x^m}{\Pi m}\Sigma n^m+\cdots=$$

$$n+\frac{n^2}{2}x+\frac{n^3}{3}\frac{x^2}{\Pi 2}+\frac{n^4}{4}\frac{x^3}{\Pi 3}+\cdots+\frac{n^{m+1}}{m+1}\frac{x^m}{\Pi m}+\cdots$$

$$+\frac{n}{2}x+\frac{n^2}{2}\frac{x^2}{\Pi 2}+\frac{n^3}{2}\frac{x^3}{\Pi 3}+\cdots+\frac{n^m}{2}\frac{x^m}{\Pi m}+\cdots$$

$$+nB_1\frac{x^2}{\Pi 2}+\frac{3}{2}B_1n^2\frac{x^3}{\Pi 3}+\cdots+\frac{m_1}{2}B_1n^{m-1}\frac{x^m}{\Pi m}+\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots-\frac{m_3}{4}B_3n^{m-3}\frac{x^m}{\Pi m}+\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots+\frac{m_5}{6}B_5n^{m-5}\frac{x^m}{\Pi m}+\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots-\frac{m_7}{8}B_7n^{m-7}\frac{x^m}{\Pi m}+\cdots$$

. . . . ;

dal confronto dei coefficienti delle medesime potenze di x, risultano quindi le formole

$$\Sigma n = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} = \frac{n(n+1)}{2},$$

$$\Sigma n^2 = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + n\ B_1 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{2.3},$$

$$\Sigma n^3 = \frac{n^4}{4} + \frac{n^3}{2} + \frac{3}{2} B_1 n^2 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2,$$

$$\Sigma n^4 = \frac{n^5}{5} + \frac{n^4}{2} + 2 B_1 n^3 - B_3 n = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{2.3.5},$$

. . . . ,

e in generale

$$\Sigma n^m = \frac{n^{m+1}}{m+1} + \frac{n^m}{2} + \frac{m_1}{2} B_1 n^{m-1} - \frac{m_3}{4} B_3 n^{m-3} + \frac{m_5}{6} B_5 n^{m-5} - \frac{m_7}{8} B_7 n^{m-7} + \cdots$$

Le formole precedenti possono servire altresì al calcolo dei numeri Bernoulliani.

Del resto la quantità Σn^m può calcolarsi indipendentemente dai numeri Bernoulliani giovandosi della formola (164)

$$(m+n)_{m+1} = m_0 + (m+1)_1 + (m+2)_2 + \cdots + (m+n-1)_m,$$

la quale, facendo

$$\Sigma (m+n-1)_m = m_0 + (m+1)_1 + \cdots + (m+n-1)_m,$$

può scriversi

$$\Sigma (m+n-1)_m = (m+n)_{m+1},$$

ovvero

$$\Sigma n(n+1)\ldots(n+m-1) = \frac{n(n+1)\ldots(n+m)}{m+1}.$$

Ma si ha

$$n(n+1)\ldots(n+m-1) = n^m + C_{1,m-1} n^{m-1} + C_{2,m-1} n^{m-2} + \cdots + C_{m-1,m-1} n,$$

ove $C_{r,m-1}$ indica la somma di tutte le combinazioni senza ri-

petizioni della classe r^{esima} che si possono fare coi numeri $1, 2, 3, \ldots (m-1)$; quindi la formola precedente diventa

$$\sum n^m + C_{1,m-1} \sum n^{m-1} + C_{2,m-1} \sum n^{m-2} + \cdots + C_{m-1,m-1} \sum n = \frac{n(n+1)\ldots(n+m)}{m+1}.$$

Facendo $m = 1, 2, 3, 4, \ldots$, dedurremo

$$\sum n = \frac{n(n+1)}{2},$$

$$\sum n^2 + \sum n = \frac{n(n+1)(n+2)}{2},$$

$$\sum n^3 + 3\sum n^2 + 2\sum n = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4},$$

$$\sum n^4 + 6\sum n^3 + 11\sum n^2 + 6\sum n = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{5},$$

. . . . ,

Da queste formole si deducono facilmente i valori di $\sum n$, $\sum n^2$, $\sum n^3$, $\sum n^4, \ldots$; una formola generale si può ottenere dalla teoria dei determinanti, come si vedrà nella 2ª Parte.

Convergenza della serie logaritmica.

181. *La serie*

$$\sum_1^\infty (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \cdots,$$

è convergente indipendentemente dall' ordine dei termini per tutti i punti compresi nel cerchio di convergenza di raggio 1; *è semplicemente convergente per quei punti della circonferenza limite che corrispondono a valori dell' argomento del numero complesso* x *che non sieno multipli dispari di* π. *Per gli altri punti di questa circonferenza e per tutti quelli che sono al di fuori di essa la serie è divergente.*

La serie dei moduli

$$mod\, x + \frac{(mod\, x)^2}{2} + \frac{(mod\, x)^3}{3} + \cdots ,$$

è convergente se si ha $mod\, x < 1$, poichè il rapporto di due termini consecutivi è uguale a $mod\, x$. Se $mod\; x > 1$, la serie proposta è divergente, poichè il modulo di $\frac{x^n}{n}$ cresce indefinitamente con n. Laonde la serie $\sum_1^\infty (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$ è convergente indipendentemente dall'ordine dei termini per tutti i punti compresi nella circonferenza di raggio 1, ed è divergente per tutti i punti situati al di fuori di questa circonferenza. Esaminiamo ora ciò che accade pei punti situati sopra tale circonferenza.

Per questi punti, indicando con θ l'argomento del numero complesso x, la serie data diventa

$$(\cos\theta + i\, sen\, \theta) - \frac{1}{2}(\cos 2\theta + i\, sen\, 2\theta) + \frac{1}{3}(\cos 3\theta + i\, sen\, 3\theta) - \cdots$$

che è convergente (89) per tutti i valori di θ che non sono multipli dispari di π. Se poi osserviamo che la serie dei moduli è divergente, si vede chiaramente che sulla circonferenza del cerchio di convergenza la serie proposta è semplicemente convergente per tutti i punti che corrispondono a valori di θ che non sono multipli dispari di π, ed è divergente per gli altri punti.

Somma della serie logaritmica.

182. *In tutti i casi nei quali la serie* $\sum_1^\infty (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$ *è convergente si ha*

$$(5) \qquad lim\,[m\,((1+x)^{\frac{1}{m}} - 1)] = \sum_1^\infty (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}.$$

Confrontiamo la serie proposta colla serie

$$x + \frac{\frac{1}{m} - 1}{1\,.\,2}\, x^2 + \frac{\left(\frac{1}{m} - 1\right)\left(\frac{1}{m} - 2\right)}{1\,.\,2\,.\,3}\, x^3 + \cdots ,$$

che, se m è un numero positivo, è convergente per tutti i valori del modulo di x che sono uguali o inferiori ad 1.

Se osserviamo che per $m=\infty$

$$\lim \frac{\left(\frac{1}{m}-1\right)\left(\frac{1}{m}-2\right) \dots \left(\frac{1}{m}-(n-1)\right)}{1.2\dots n} = (-1)^n \frac{1}{n},$$

si vede che ciascun termine della prima serie è il limite del termine corrispondente della seconda serie; quindi la prima serie avrà per somma il limite della somma della seconda serie, cioè il limite di $m\ [(1+x)^{\frac{1}{m}}-1]$, come volevamo dimostrare.

183. Se x è una variabile reale il valore del primo membro dell'equazione (5) si deduce immediatamente dalla formola

$$a^x = 1 + \frac{l\,a}{1}x + \frac{(l\,a)^2}{1.2}x^2 + \frac{(l\,a)^3}{1.2.3}x^3 + \cdots,$$

ponendo $x = \frac{1}{m}$, $a = 1+x$; infatti troveremo

$$m\,[(1+x)^{\frac{1}{m}}-1]$$
$$= l(1+x) + \frac{[l(1+x)]^2}{1.2}\frac{1}{m} + \frac{[l(1+x)]^3}{1.2.3}\frac{1}{m^2} + \cdots$$

Se indichiamo con S la somma della serie convergente

$$\frac{[l(1+x)]^2}{1.2} + \frac{[l(1+x)]^3}{1.2.3}\frac{1}{m} + \cdots,$$

avremo

$$m\,[(1+x)^{\frac{1}{m}}-1] = l(1+x) + \frac{S}{m},$$

da cui per $m=\infty$,

$$\lim m\,[(1+x)^{\frac{1}{m}}-1] = l(1+x); \tag{6}$$

talchè per tutti i valori assoluti di x che sono inferiori o eguali a 1, si ha

$$l(1+x) = \sum_1^\infty (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}. \tag{7}$$

Se facciamo $x = 1$, avremo

$$l2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots .$$

Indicando con *log* i logaritmi corrispondenti ad una base qualunque a, sappiamo che (Bertrand, *Algebra* N° 283),

$$log(1 + x) = log\, e\, l(1 + x);$$

quindi

$$log(1 + x) = log\, e \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots\right).$$

Se per analogia supponiamo che la formola (6) sussista anche nel caso cho x sia una variabile complessa, potremo dire che l'equazione (7) ha luogo semprechè la serie del secondo membro è convergente, sia per valori reali come per valori complessi di x.

Dimostriamo ora un teorema di cui abbiamo bisogno in seguito.

184. *Per qualunque valore di* x *il cui modulo è minore di* $\frac{1}{2}$, *si ha*

$$l(1 + x) = x - \mu x^2,$$

ove μ *è una quantità il cui modulo è minore di* 1.

Infatti, scriviamo l'equazione (7) nel seguente modo

$$l(1 + x) = x - x^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}x^2 - \cdots\right);$$

ma si ha

$$mod \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}x^2 - \cdots\right),$$

$$< mod \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}x^2 + \cdots\right),$$

$$< \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} mod\, x + \frac{1}{4} mod\, x^2 + \cdots\right),$$

$$< \frac{1}{2}(1 + mod\, x + (mod\, x)^2 + \cdots) = \frac{1}{2} \frac{1}{1 - mod\, x};$$

dunque per tutti i valori di $mod\, x$ che sono minori di $\frac{1}{2}$, avremo

$$mod\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}x+\frac{1}{4}x^2-\cdots\right)<1.$$

lo che dimostra il teorema.

Funzione logaritmica di una variabile complessa.

185. *La funzione logaritmica* $l(1+x)$ *è una funzione continua di* x, poichè è sviluppabile in una serie che procede secondo le potenze intere e positive di x.

Il logaritmo di un numero complesso si può definire in un modo analogo a quello usato nell'Algebra elementare per un logaritmo reale; cioè si può assumere per definizione che se si ha

$$a+bi=e^{x+yi},$$

$x+yi$ è il logaritmo neperiano di $a+bi$, ovvero

$$x+yi=l(a+bi).$$

Ora se poniamo

$$a+bi=e^x(\cos y+i\,\mathrm{sen}\,y),$$

da cui

$$x=\frac{1}{2}l(a^2+b^2),\quad \cos y=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad \mathrm{sen}\,y=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

e supponiamo a un numero positivo, avremo (28)

$$a+bi=e^x[\cos(\pm 2k\pi+y)+i\,\mathrm{sen}(\pm 2k\pi+y)]$$

$$-a+bi=e^x[\cos(\pm(2k+1)\pi-y)+i\,\mathrm{sen}(\pm(2k+1)\pi-y)],$$

ovvero

$$a+bi=e^{x+yi\pm 2k\pi i}$$

$$-a+bi=e^{x-yi\pm(2k+1)\pi i},$$

ove

$$y = arc\ tan \frac{b}{a}.$$

Quindi per la seconda definizione

$$l(a+bi) = \frac{1}{2} l(a^2+b^2) + i\ arc\ tan \frac{b}{a} \pm 2k\pi i\ ,$$

$$l(-a+bi) = \frac{1}{2} l(a^2+b^2) - i\ arc\ tan \frac{b}{a} \pm (2k+1)\pi i.$$

Queste formole mostrano che una quantità qualunque ha infiniti logaritmi, poichè a k possiamo dare qualunque valore intero e positivo.

Se facciamo $b=0$, avremo

$$l(a) = l\,a \pm 2k\pi i\ ,\quad l(-a) = l\,a \pm (2k+1)\pi i.$$

Dalla prima formola si deduce che un numero positivo ha un solo logaritmo reale e infiniti immaginari, e dalla seconda apparisce che tutti i logaritmi di un numero negativo sono immaginari, poichè anche per $k=0$ si ha

$$l(-a) = l\,a \pm \pi i.$$

Se $a=1$, avremo

$$l(1) = \pm 2k\pi i\ ,\quad l(-1) = \pm(2k+1)\pi i\ ,$$

da cui

$$+1 = e^{\pm 2k\pi i},\ -1 = e^{\pm(2k+1)\pi i},$$

ed estraendo la radice n^{esima},

$$(+1)^{\frac{1}{n}} = e^{\pm\frac{2k\pi i}{n}},\quad (-1)^{\frac{1}{n}} = e^{\pm\frac{(2k+1)\pi i}{n}}.$$

La considerazione di queste formole condurrebbe ai medesimi risultati che abbiamo ottenuto nei n[i] 50 e 51 riguardo alle radici dell'unità.

Se osserviamo che l'equazione

$$e^z e^{z'} = e^{z+z'}\ ,$$

sussiste anche pei valori complessi di z e di z', vediamo che facendo

$$e^z = x, \quad e^{z'} = x',$$

l'equazione

$$lx + lx' = l(xx'),$$

che è una conseguenza della precedente ha luogo anche per valori complessi di x e di x'; solamente in questo caso bisogna intendere che uno dei valori di lx aumentato di uno dei valori di lx' è uguale a uno dei valori di $l(xx')$.

Nuove serie che si deducono dalla serie logaritmica.

186. Se nel valore di $l(a + bi)$ poniamo

$$1 + x\cos\theta = a, \quad x\,\mathrm{sen}\,\theta = b,$$

da cui

$$1 + 2x\cos\theta + x^2 = a^2 + b^2, \quad \frac{b}{a} = \frac{x\,\mathrm{sen}\,\theta}{1 + x\cos\theta},$$

avremo

$$l(1 + x\cos\theta + ix\,\mathrm{sen}\,\theta)$$
$$= \frac{1}{2}l(1 + 2x\cos\theta + x^2) + i\,\mathrm{arc\,tan}\frac{x\,\mathrm{sen}\,\theta}{1 + x\cos\theta} \pm 2k\pi i.$$

Inoltre si ha

$$l(1 + x\cos\theta + ix\,\mathrm{sen}\,\theta) = \sum_1^\infty (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}(\cos n\theta + i\,\mathrm{sen}\,n\theta);$$

prima di sostituire per il primo membro il valore trovato di sopra, osserviamo che il secondo membro è una funzione continua di x per tutti i valori di x pei quali la serie è convergente. Quindi per questi valori di x anche il primo membro dev'essere una funzione continua, lo che non può avvenire se k non è una quantità costante. Per trovare questo valore di k facciamo $x = 0$; allora il secondo membro dell'ultima equazione si riduce a zero e per conseguenza deve aversi $k = 0$. Laonde avremo

$$\frac{1}{2}l(1 + 2x\cos\theta + x^2) + i\,\mathrm{arc\,tan}\frac{x\,\mathrm{sen}\,\theta}{1 + x\cos\theta}$$
$$= \sum_1^\infty (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}(\cos n\theta + i\,\mathrm{sen}\,n\theta).$$

Dal confronto delle parti reali e delle parti immaginarie si deducono le due formole

$$(8)\qquad \frac{1}{2}\, l(1+2x\cos\theta+x^2)=\sum_1^\infty(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}\cos n\theta\,,$$

$$(9)\qquad arc\tan\frac{x\,sen\,\theta}{1+x\cos\theta}=\sum_1^\infty(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}\,sen\,n\theta.$$

Queste equazioni sussistono per tutti i valori assoluti di x minori di 1 ed anche per $x=1$, purchè θ non sia multiplo dispari di π (181).

Da queste formole se ne possono dedurre molte altre dando valori particolari a x. Così se per θ sostituiamo $\theta+\pi$ e poi facciamo $x=\cos\theta$, avremo.

$$-\frac{1}{2}\, l(sen^2\theta)=\sum_1^\infty\frac{\cos^n\theta\cos n\theta}{n}\,,$$

$$-arc\tan(\cot\theta)=\sum_1^\infty\frac{\cos^n\theta\,sen\,n\theta}{n}\,,$$

Se nella prima formola supponiamo che θ sia compreso fra 0 e π potremo sostituire $l\,sen\,\theta$ invece di $\frac{1}{2}\,l\,(sen^2\theta)$, poichè le due funzioni lx e $\frac{1}{2}\,l(x^2)$ sono identiche soltanto per valori positivi di x; in guisa che per questi valori di θ avremo

$$-l\,sen\,\theta=\sum_1^\infty\frac{\cos^n\theta\cos n\theta}{n}\,,$$

Nella seconda formola giova osservare che ad $arc\tan(\cot\theta)$ $=arc\tan\left[\tan\left(\frac{1}{2}\pi-\theta\right)\right]$ non possiamo sostituire in generale $\frac{1}{2}\pi-\theta$, poichè la prima funzione è periodica come $\cot\theta$ mentre la seconda non è periodica.

Se nella formola (8) poniamo $x=1$, troveremo per tutti i valori di θ che non sono multipli dispari di π,

$$l\,2+\frac{1}{2}\,l\left(\cos^2\frac{1}{2}\theta\right)=\sum_1^\infty(-1)^{n-1}\frac{\cos n\theta}{n}\,,$$

da cui sostituendo $\theta + \pi$ invece di θ, dedurremo per tutti i valori di θ che non sono multipli pari di π,

$$l\,2 + \frac{1}{2}\, l\left(sen^2 \frac{1}{2}\theta\right) = -\sum_1^\infty \frac{\cos n\theta}{n},$$

Combinando insieme queste due equazioni otterremo

$$\frac{1}{4}\, l\left(tan^2 \frac{1}{2}\theta\right) = -\sum_1^\infty \frac{\cos(2n-1)\theta}{(2n-1)},$$

$$\frac{1}{4}\, l\left(\cos^2 \frac{1}{2}\theta\right) = \sum_1^\infty \frac{\cos(2n-1)\theta}{n},$$

Dalla formola (9) ponendo $x = 1$, si ricava

$$arc\,tan\left(tan \frac{1}{2}\theta\right) = \sum_1^\infty (-1)^{n-1} \frac{sen\, n\theta}{n},$$

da cui supponendo che θ sia compreso fra $-\pi$ e π,

$$\frac{1}{2}\theta = \sum_1^\infty (-1)^{n-1} \frac{sen\, n\theta}{n}.$$

Se facciamo

$$f(\theta) = sen\,\theta - \frac{1}{2} sen\,2\theta + \cdots,$$

$f(\theta)$ è una funzione continua per tutti i valori di θ compresi fra $-\pi$ e π, ma cessa di esser continua per $\theta = \pm\pi$, poichè le due funzioni $f(\pm\pi) = 0$ e $f[\pm(\pi - h)] = \pm \frac{\pi - h}{2}$ convergono verso limiti differenti al decrescere di h. (Vedi n° 97).

Serie che servono al calcolo numerico dei logaritmi.

187. Supponendo che x sia una variabile reale, dall'equazione (7) si deduce

$$(10) \qquad l(1-x) = -\sum_1^\infty \frac{x^n}{n}, \quad \text{ovvero} \quad l\frac{1}{1-x} = \sum_1^\infty \frac{x^n}{n}.$$

L'espressione $\frac{1}{1-x}$ è di maggiore 1, poichè si ha $x < 1$, quindi

possiamo fare $\frac{1}{1-x}=1+y$, da cui $x=\frac{y}{1+y}$ ove y indica un numero positivo qualunque; per conseguenza l'eguaglianza precedente prende la forma

$$l(1+y)=\sum_1^\infty \frac{y^n}{n(1+y)^n}.$$

La ricerca del logaritmo neperiano di un dato numero è completamente risoluta mediante le ultime due formole, quando si consideri la quistione da un punto di vista puramente teorico: la prima formola vale per tutti i numeri minori di 1, e la seconda per tutti quelli che sono maggiori di 1. Ma pel calcolo effettivo dei logaritmi queste formole riescono di poca utilità, poichè le serie contenute nei secondi membri hanno una lenta convergenza.

Per trovare serie di più rapida convergenza, facciamo $x=\frac{h}{y}$ nella formola (7); troveremo

$$l(y+h)=l\,y+\sum_1^\infty(-1)^{n-1}\frac{h^n}{n\,y^n},$$

nell'ipotesi di $y>h$. Se $h=1$, avremo

$$l(1+y)=l\,y+\sum_1^\infty(-1)^{n-1}\frac{1}{n\,y^n},$$

formola che dà il logaritmo di $1+y$ per mezzo di quello di y e di una serie che è convergentissima quando y è un numero molto grande.

Se addizioniamo l'equazione (7) e (10) troveremo

$$l\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=2\sum_1^\infty\frac{x^{2n-1}}{2n-1},$$

ovvero, posto $\frac{1+x}{1-x}=y$, da cui $x=\frac{y-1}{y+1}$,

$$l\,y=2\sum_1^\infty\frac{1}{2n-1}\left(\frac{y-1}{y+1}\right)^{2n-1},$$

che sussiste per ogni valore positivo di y.

Per valutare l'errore che si commette calcolando i logaritmi con questa formola, cerchiamo il valore del resto R della serie del secondo membro, cioè dell'espressione

$$R=2\left[\frac{1}{2n+1}\left(\frac{y-1}{y+1}\right)^{2n+1}+\frac{1}{2n+3}\left(\frac{y-1}{y+1}\right)^{2n+3}+\cdots\right].$$

Ora è chiaro che

$$R<\frac{2}{2n+1}\left(\frac{y-1}{y+1}\right)^{2n+1}\left[1+\left(\frac{y-1}{y+1}\right)^{2}+\left(\frac{y-1}{y+1}\right)^{4}+\cdots\right],$$

ovvero

$$R<\frac{2}{2n+1}\left(\frac{y-1}{y+1}\right)^{2n+1}\frac{1}{1-\left(\frac{y-1}{y+1}\right)^{2}}$$

e finalmente

$$R<\frac{1}{2n+1}\left(\frac{y-1}{y+1}\right)^{2n-1}\frac{(y-1)^{2}}{2y},$$

Così se facciamo $y=2$, $n=8$, troveremo

$$R<\frac{1}{4\,.\,17\,.\,3^{15}}=0,\ 0000\ 0000\ 1,$$

e la formola

$$l2=2\left[\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{3}+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^{5}+\cdots+\frac{1}{15}\left(\frac{1}{3}\right)^{15}\right],$$

darà esattamente sino all'ottava cifra decimale,

$$l2=0,69314718\ .$$

Si può ottenere un'altra formola per la quale conosciuto il logaritmo di un numero si determina quello del numero seguente. Infatti posto $\frac{1+x}{1-x}=1+\frac{h}{y}$, da cui $x=\frac{h}{2y+h}$, avremo

$$l(y+h)=l\,y+2\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\left(\frac{h}{2y+h}\right)^{2n-1},$$

e per $h=1$

$$l(y+1)=l\,y+2\sum_1^\infty \frac{1}{2n-1}\left(\frac{1}{2y+1}\right)^{2n-1},$$

che vale per tutti i valori positivi di y.

Per quest' ultima formola si ha

$$R<\frac{1}{2n+1}\left(\frac{1}{2y+1}\right)^{2n-1}\frac{1}{4\,y\,(y+1)}.$$

Così per $y=2$, $n=5$, troveremo

$$l3=1,\ 09861229\cdot,$$

valore esatto fino all' ottava cifra decimale.

188. Siccome è sufficiente saper determinare i logaritmi dei numeri primi, poichè quelli di tutti gli altri numeri si deducono immediatamente dai primi per un noto teorema, sarà utile dare una formola che soddisfi a quest' oggetto. A tal fine nelle due formole

$$l(1+x)=\sum_1^\infty(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n},\quad l(1-x)=-\sum_1^\infty\frac{x^n}{n},$$

facciamo $x=\frac{1}{p}$, $p>1$, avremo

$$l(p+1)=l\,p+\sum_1^\infty(-1)^{n-1}\frac{1}{n\,p^n},\quad l(p-1)=l\,p-\sum_1^\infty\frac{1}{n\,p^n},$$

da cui

$$l\,p=\frac{l(p+1)+l(p-1)}{2}+\sum_1^\infty\frac{1}{2n\,p^{2n}};$$

il resto della serie è dato da

$$R<\frac{1}{(2n+2)\,p^{2n}}\,\frac{1}{p^2-1}.$$

Se p è un numero primo diverso da 2, $p+1$ e $p-1$ sono numeri pari, che risultano dal prodotto di numeri primi minori

di p. Così, poichè conosciamo già i logaritmi di 2 e di 3, potremo mediante l'ultima formola trovare il logaritmo di 5; infatti troviamo

$$l5 = \frac{l3 + 3l2}{2} + \sum_1^\infty \frac{1}{2n \cdot 5^{2n}}.$$

Se facciamo $n = 5$, otterremo

$$R < \frac{1}{12 \cdot 24 \cdot 5^{10}}.$$

e

$$l5 = \frac{l3+3l2}{2} + \frac{1}{2}\frac{4}{100} + \frac{1}{4}\left(\frac{4}{100}\right)^2 + \frac{1}{6}\left(\frac{4}{100}\right)^3 + \frac{1}{8}\left(\frac{4}{100}\right)^4 + \frac{1}{10}\left(\frac{4}{100}\right)^5,$$

eseguendo i calcoli si trova esattamente sino all'ottava cifra decimale;

$$l5 = 1,60943791,$$

189. Un'altra formola molto utile pel calcolo dei logaritmi si trova nel seguente modo. Se supponiamo $q < p$, avremo

$$l(p+q) = lp + l\left(1 + \frac{q}{p}\right) = lp + \frac{q}{p} - \frac{1}{2}\frac{q^2}{p^2} + \frac{1}{3}\frac{q^3}{p^3} - \cdots;$$

ove si ha

$$\frac{1}{2}\frac{q^2}{p^2} - \frac{1}{3}\frac{q^3}{p^3} + \cdots < \frac{1}{2}\frac{q^2}{p^2}.$$

Se dunque q è così piccolo relativamente a p che il valore di $\frac{1}{2}\frac{q^2}{p^2}$ non influisca sull'ultima cifra decimale che si vuol calcolare esattamente, potremo scrivere semplicemente

$$l(p+q) = lp + \frac{q}{p};$$

la quale formola serve per calcolare il logaritmo di $p+q$, noto che sia quello di p.

190. Per passare dai logaritmi naturali a quelli corrispondenti ad una base qualunque a, sappiamo che basta moltiplicare i primi pel numero $\frac{1}{la}$, che si chiama *modulo* del sistema corrispondente alla base a. Se prendiamo per base il numero 10, avremo

$$\frac{1}{l10}=\frac{1}{l2+l5}=\frac{1}{2,\,30258509}=0,\,43429448;$$

quindi moltiplicando i logaritmi naturali per $0,\,43429448$ si ottengono i logaritmi delle tavole; e reciprocamente moltiplicando questi ultimi per $2,\,30258509$ si hanno i logaritmi neperiani.

Ora osserviamo che se i logaritmi si riferiscono alla base a, l'equazione trovata alla fine dell'ultimo numero diventa

$$\log(p+q)-\log p=\frac{q}{p}\frac{1}{la}.$$

Su questa formola è fondata la regola delle parti proporzionali che si usa nelle tavole dei logaritmi. Infatti se facciamo $a=10$, $q=1$, avremo

$$\log(p+1)-\log p=\frac{1}{p}\frac{1}{l10},$$

da cui

$$\log(p+q)-\log p=q\,[\log(p+1)-\log p].$$

Per calcolare l'errore che si commette facendo uso di questa formola, osserviamo che ponendo

$$\Delta=\log(p+1)-\log(p),\quad \delta=\log(p+q)-\log p\,,$$

ove q è <1, si ha

$$\frac{1}{p\,l10}>\Delta>\frac{1}{p\,l10}\left(1-\frac{1}{2p}\right),$$

$$\frac{q}{p\,l10}>\delta>\frac{q}{p\,l10}\left(1-\frac{q}{2p}\right).$$

Quindi il prodotto Δq è compreso fra $\frac{q}{p\,l10}$ e $\frac{q}{p\,l10}\left(1-\frac{1}{2p}\right)$;

ma δ è *a* più forte ragione compreso fra questi due numeri; dunque l'errore che si commette prendendo Δq invece di δ è minor della differenza

$$\frac{q}{p\,l\,10} - \frac{q}{p\,l\,10}\left(1 - \frac{1}{2p}\right) = \frac{q}{2p^2\,l\,10}.$$

Ciò posto, se prendiamo $p > 10000$, la frazione $\frac{q}{2p^2\,l\,10}$ ha un valore minore di

$$\frac{0,43429448}{200000000};$$

dunque questo valore è minore del quarto dell'unità decimale dell'ottavo ordine. Per conseguenza l'errore che si commette prendendo $q\,\Delta$ per valore approssimato di δ non può influire sulle sette prime cifre decimali del logaritmo richiesto.

Reciprocamente se si cerca il numero corrispondente ad un dato logaritmo, supponendo che p e $p+1$ sieno i numeri i cui logaritmi comprendono il logaritmo dato $\log p + \delta$, e che $p+q$ sia il numero corrispondente, il valore approssimato che si ottiene per q è $\frac{\delta}{\Delta}$; quindi l'errore è $q - \frac{\delta}{\Delta}$. Ma il valore assoluto della differenza $q\,\Delta - \delta$ è $< \frac{q}{2p^2\,l\,10}$, quindi

$$q - \frac{\delta}{\Delta} < \frac{q}{2p^2\,\Delta\,l\,10} < \frac{q}{2p-1},$$

poichè si ha

$$\Delta > \frac{1}{pl\,10}\left(1 - \frac{1}{2q}\right).$$

Laonde se prendiamo $p > 10000$, otterremo $1 - \frac{1}{2p} < \frac{1}{20000}$ in guisa che l'errore che commettiamo prendendo $\frac{\delta}{\Delta}$ invece di q non influirà sulle prime quattro cifre decimali del numero dato. Ma questi risultati vanno modificati poichè Δ e δ non si conoscono esattamente; per questa ragione q è esatto fino ai centesimi.

Per altri particolari su questo argomento rimandiamo alla *Théorie générale des approximations num.*, di Vieille.

Sviluppo in serie della funzione esponenziale e logaritmica quando la variabile è una serie convergente.

191. Se la serie $y = a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$ è convergente indipentemente dall'ordine dei termini, avremo

$$e^y = 1 + y + \frac{y^2}{1 \cdot 2} + \frac{y^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdots,$$

e

$$y^m = x^m (a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + \cdots) = D_{m,m} x^m + D_{m+1,m} x^{m+1} + \cdots$$

Sostituendo nella prima serie per le potenze di y i valori che si deducono dall'ultima formola, troveremo la serie doppia

$$\begin{aligned} e^y = 1 + D_{1,1} x + D_{2,1} x^2 + \cdots + D_{n,1} x^n + \cdots \\ + \frac{D_{2,2}}{1 \cdot 2} x^2 + \cdots + \frac{D_{n,2}}{1 \cdot 2} x^n + \cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ + \frac{D_{n,n}}{1 \cdot 2 \cdots n} x^n + \cdots, \\ + \cdots, \end{aligned}$$

che è convergente poichè convergenti sono le serie orizzontali e quella formata dalle loro somme; talchè sommando per verticali e facendo

$$A_n = \sum_{h=1}^{h=n} \frac{D_{n,h}}{\Pi h},$$

avremo

$$e^{a_1 x + a_2 x^2 + \cdots} = 1 + A_1 x + A_2 x^2 + \cdots$$

La penultima formola determina il valore di un coefficiente qualunque della serie precedente indipendentemente dagli altri, ma supponendo conosciute le somme D. Volendo trovare una for-

mola che serva al calcolo successivo dei coefficienti A senza bisogno di conoscere le quantità D, procederemo nel seguente modo. Formiamo l'equazioni

$$a_1 A_{n-1} = a_1 D_{n-1,1} + \frac{a_1 D_{n-1,2}}{1.2} + \cdots + \frac{a_1 D_{n-1,n-2}}{1.2..(n-2)} + \frac{a_1 D_{n-1,n-1}}{1.2..(n-1)},$$

$$2a_2 A_{n-2} = 2a_2 D_{n-2,1} + \frac{2a_2 D_{n-2,2}}{1.2} + \cdots + \frac{2a_2 D_{n-2,n-2}}{1.2..(n-2)},$$

. . . . ,

$$(n-2)\, a_{n-2} A_2 = (n-2)\, a_{n-2} D_{2,1} + \frac{(n-2)\, a_{n-2} D_{2,2}}{1.2},$$

$$(n-1)\, a_{n-1} A_1 = (n-1)\, a_{n-1} D_{1,1},$$

e sommiamole avendo riguardo alla formola (21)

$$\frac{n D_{n,m+1}}{m+1} = a_1 D_{n-1,m} + 2a_2 D_{n-2,m} + \cdots + (n-m)\, a_{n-m} D_{m,m};$$

troveremo

$$a_1 A_{n-1} + 2a_2 A_{n-2} + \cdots + (n-1)\, a_{n-1} A_1$$

$$= n\left(\frac{D_{n,2}}{1.2} + \frac{D_{n,3}}{1.2.3} + \cdots + \frac{D_{n,n-1}}{1.2\ldots(n-1)} + \frac{D_{n,n}}{1.2\ldots n}\right),$$

poichè $a_1 D_{n-1,n-1} = D_{n,n}$.

Aggiungendo ai due membri $n a_n = n D_{n,1}$, avremo

$$a_1 A_{n-1} + 2a_2 A_{n-2} + \cdots + (n-1)\, a_{n-1} A_1 + n a_n = n A_n,$$

la quale relazione serve a determinare A_n quando sieno conosciuti i coefficienti precedenti.

192. Per dare qualche applicazione delle formole precedenti prendiamo l'equazione

$$l\left(\frac{1}{1-x}\right) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots,$$

da cui si ricava

$$e^{x+\frac{x^2}{2}+\cdots}=\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\cdots .$$

In questo caso si ha $a_n=\frac{1}{n}$, $A_n=1$; laonde per la prima delle formole trovate nel n° precedente, avremo

$$1=D_{n,1}+\frac{D_{n,2}}{1.2}+\frac{D_{n,3}}{1.2.3}+\cdots+\frac{D_{n,n}}{1.2\ldots n}=\sum_{h=1}^{h=n}\frac{D_{n,h}}{\Pi h},$$

ove le disposizioni sono prese rispetto ai numeri $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$ (1)

Se n è un numero primo, i termini $D_{n,1}=\frac{1}{n}, \frac{D_{n,n}}{1.2\ldots n}=\frac{1}{1.2\ldots n}$ sono i soli dell' equazione precedente che contengano n al denominatore, se quindi indichiamo con s la somma dei termini rimanenti, s sarà eguale ad una frazione che non conterrà il fattore n nel denominatore, ed avremo

$$1-s=\frac{1}{n}+\frac{1}{1.2\ldots n},$$

da cui

$$(1-s).1.2\ldots(n-1)=\frac{1.2\ldots(n-1)+1}{n},$$

lo che esprime che *il prodotto di tutti i numeri interi minori di un numero primo* n, *aumentato di* 1 *è divisibile per* n. Questa dimostrazione del teorema di Wilson è di Stern.

193. Dalla formola

$$e^{a_1x+a_2x^2+\cdots}=1+A_1x+A_2x^2+\cdots ,$$

(1) Vedi, Jacobi. *Zur combinatorischen Analysis*, nel 22^{esimo} vol. del *Giornale di Crelle*.

si ricava

$$(a) \qquad l(1 + A_1 x + A_2 x^2 + \cdots) = a_1 x + a_2 x^2 + \cdots ,$$

Cerchiamo il valore dei coefficienti a_1, a_2, ... in funzione dei coefficienti A_1, A_2, ... A tale oggetto prendiamo x tanto piccola che la serie $A_1 x + A_2 x^2 + \cdots$ sia < 1, e facciamo

$$y = A_1 x + A_2 x^2 + \cdots ;$$

avremo

$$l(1 + y) = y - \frac{1}{2} y^2 + \frac{1}{3} y^3 - \cdots$$

Ora si ha

$$\begin{array}{lllll}
y = & D_{1,1} x + & D_{2,1} x^2 + & D_{3,1} x^3 + \cdots + & D_{n,1} x^n + \cdots \\
-\frac{1}{2} y^2 = & & -\frac{1}{2} D_{2,2} x^2 - & \frac{1}{2} D_{3,2} x^3 + \cdots - & \frac{1}{2} D_{n,2} x^n - \cdots \\
\frac{1}{3} y^3 = & & & \frac{1}{3} D_{3,3} x^3 + \cdots + & \frac{1}{3} D_{n,3} x^n + \cdots \\
\cdot\ \cdot\ \cdot & & & & \cdot\ \cdot\ \cdot \\
(-1)^{n-1} \frac{1}{n} y^n = & & & & (-1)^{n-1} \frac{1}{n} D_{n,n} x^n + \cdots \\
\cdot\ \cdot\ \cdot & & & & \cdot\ \cdot\ \cdot
\end{array}$$

I secondi membri di queste eguaglianze formano una serie doppia convergente, poichè convergente è non solo ciascuna serie orizzontale ma altresì la serie delle loro somme, anche se si prendono tutti i termini positivi. Quindi possiamo sommare per verticali e troveremo

$$l(1 + A_1 x + A_2 x^2 + \cdots) = D_{1,1} x + \left(D_{2,1} - \frac{1}{2} D_{2,2} \right) x^2 + \cdots ;$$

il coefficiente di x^n è dato dalla formola

$$a_n = \sum_{h=1}^{h=n} (-1)^{h-1} \frac{D_{n,h}}{h} .$$

Questa formola è fondata sopra una ipotesi particolare che abbiamo fatta pel valore di x, nondimeno essa è generale ed ha luogo sem-

pre che si verifica la formola (a), poichè $l(1+A_1 x+A_2 x^2+\cdots)$ non è sviluppabile in serie procedente secondo le potenze ascendenti di x che in una sola maniera (112).

Il valore di a_n è altresì dato dalla formola

$$a_n=\frac{n A_n-a_1 A_{n-1}-2a_2 A_{n-2}-\cdots-(n-1)\,a_{n-1} A_1}{n}.$$

194. Dall' equazione

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{1.2}+\cdots,$$

si deduce

$$l\left(1+x+\frac{x^2}{1.2}+\cdots\right)=x;$$

quindi in questo caso

$$A_n=\frac{1}{1.2\ldots.n},\quad a_1=1,\quad a_2=a_3=\cdots=0.$$

Laonde per tutti i valori di $n>1$, si ha

$$0=\sum_{h=1}^{h=n}(-1)^{h-1}\frac{D_{n,h}}{h},$$

ove le quantità D sono prese rispetto agli elementi

$$1,\ \frac{1}{1.2},\ \frac{1}{1.2.3}\ldots.$$

CAPITOLO IX.

SERIE CIRCOLARI ED IPERBOLICHE.

Serie goniometriche.

195. *Le due serie*

$$1-\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^4}{1.2.3.4}-\frac{x^6}{1.2.3.4.5.6}+\cdots ,$$

$$x-\frac{x^3}{1.2.3}+\frac{x^5}{1.2.3.4.5}-\frac{x^7}{1.2.3.4.5.6.7}+\cdots ,$$

sono convergenti indipendentemente dall'ordine dei termini per tutta l'estensione del piano, poichè il rapporto di due termini consecutivi ha per limite zero.

196. *Affinchè due funzioni* $\varphi(x)$ *e* $\psi(x)$ *sieno somme delle serie precedenti, cioè affinchè si abbia*

$$(1) \qquad \varphi(x)=\sum_0^n (-1)^n \frac{x^{2n}}{(\Pi\, 2n)}, \quad \psi(x)=\sum_0^n (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{\Pi\,(2n+1)},$$

ove x *è una variabile reale, è necessario e sufficiente che sieno soddisfatte le seguenti equazioni:*

$$(2) \quad \begin{cases} \varphi(x\pm y)=\varphi(x)\varphi(y)\mp\psi(x)\psi(y) , \\ \psi(x\pm y)=\psi(x)\varphi(y)\pm\psi(y)\varphi(x) , \end{cases}$$

$$(3) \qquad \lim_{m=\infty}\left[\frac{m\psi\left(\frac{x}{m}\right)}{\varphi\left(\frac{x}{m}\right)}\right]=x,$$

$$(4) \qquad \lim_{m=\infty}\left[\varphi\left(\frac{x}{m}\right)\right]^m=1.$$

1°. Queste equazioni sono conseguenze necessarie delle formole (1). Infatti moltiplicando fra di loro le due serie

$$\sum_0^\infty (-1)^n \frac{x^{2n}}{\Pi(2n)}, \quad \sum_0^\infty (-1)^n \frac{y^{2n}}{\Pi(2n)},$$

otterremo una nuova serie convergente che ha per somma $\varphi(x)\,\varphi(y)$ e per termine generale il prodotto dell' espressioni

$$1 - \frac{x^2}{\Pi 2} + \frac{x^4}{\Pi 4} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{\Pi(2n)},$$

$$1 - \frac{y^2}{\Pi 2} + \frac{y^4}{\Pi 4} - \cdots + (-1)^n \frac{y^{2n}}{\Pi(2n)},$$

cioè

$$\frac{(-1)^n}{\Pi(2n)} [x^{2n} + (2n)_2 x^{2n-2} y^2 + (2n)_4 x^{2n-4} y^4 + \cdots + y^{2n}].$$

Se moltiplichiamo fra di loro le due serie

$$\sum_0^\infty (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{\Pi(2n+1)}, \quad \sum_0^\infty (-1)^n \frac{y^{2n+1}}{\Pi(2n+1)},$$

otterremo una nuova serie convergente che ha per somma $\psi(x)\,\psi(y)$ e per termine generale il prodotto delle espressioni

$$x - \frac{x^3}{\Pi 3} + \frac{x^5}{\Pi 5} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{\Pi(2n-1)},$$

$$y - \frac{y^3}{\Pi 3} + \frac{y^5}{\Pi 5} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{y^{2n-1}}{\Pi(2n-1)},$$

cioè

$$\frac{(-1)^{n-1}}{\Pi(2n)} [(2n)_1 x^{2n-1} y + (2n)_3 x^{2n-3} y^3 + (2n)_5 x^{2n-5} y^5 + \cdots + (2n)_{2n-1}\, x\, y^{2n-1}].$$

Quindi l' espressione

$$\frac{(-1)^n}{\Pi(2n)} (x \pm y)^{2n},$$

sarà il termine generale di una serie convergente che ha per somma $\varphi(x)\varphi(y) \mp \psi(x)\psi(y)$. Ma d'altra parte si ha

$$\varphi(x \pm y) = \sum_0^\infty (-1)^n \frac{(x \pm y)^{2n}}{\Pi(2n)};$$

talchè

$$\varphi(x \pm y) = \varphi(x)\varphi(y) \mp \psi(x)\psi(y).$$

Parimente dal prodotto delle due serie

$$\varphi(x) = 1 - \frac{x^2}{\Pi 2} + \frac{x^4}{\Pi 4} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(\Pi 2n)} + \cdots,$$

$$\psi(y) = y - \frac{y^3}{\Pi 3} + \frac{y^5}{\Pi 5} - \cdots + (-1)^n \frac{y^{2n+1}}{\Pi(2n+1)} + \cdots,$$

risulta che il termine generale della serie che ha per somma $\varphi(x)\psi(y)$ sarà

$$\frac{(-1)^n}{\Pi(2n+1)}\left[(2n+1)x^{2n}y + \cdots + (2n+1)_{2n-1}x^2y^{2n-1} + y^{2n+1}\right];$$

permutando in questa formola x e y fra loro, avremo il termine generale della serie che ha per somma $\varphi(y)\psi(x)$, cioè

$$\frac{(-1)^n}{\Pi(2n+1)}\left[x^{2n+1} + (2n+1)_2 x^{2n-1}y^2 + \cdots + (2n+1)_{2n} x y^{2n}\right].$$

Quindi il termine generale della serie che ha per somma $\psi(x)\varphi(y) \pm \psi(y)\varphi(x)$ sarà dato dalla formola

$$(-1)^n \frac{(x \pm y)^{2n+1}}{\Pi(2n+1)};$$

ma si ha

$$\psi(x \pm y) = \sum_0^\infty (-1)^n \frac{(x \pm y)^{2n+1}}{\Pi(2n+1)};$$

laonde

$$\psi(x \pm y) = \psi(x)\varphi(y) \pm \psi(y)\varphi(x).$$

Per trovare la formola (3) osserviamo che indicando con m un numero maggiore di x, si ha (125)

$$1 > \varphi\left(\frac{x}{m}\right) > 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{m}\right)^2$$

$$\frac{x}{m} > \psi\left(\frac{x}{m}\right) > \frac{x}{m} - \frac{1}{6}\left(\frac{y}{m}\right)^3;$$

da queste disuguaglianze facendo crescere m indefinitamente si deduoono le due formole

$$lim\left[\varphi\left(\frac{x}{m}\right)\right] = 1,$$

$$lim\left[m\,\psi\left(\frac{x}{m}\right)\right] = x.$$

delle quali è conseguenza evidente l'equazione (3).

Finalmente, poichè si ha

$$1 - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{m}\right)^2 > \left[1 - \left(\frac{x}{m}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

la prima disuguaglianza potrà scriversi

$$1 > \varphi\left(\frac{x}{m}\right) > \left[1 - \left(\frac{x}{m}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Ora per $a > b$, e per m numero intero e positivo è noto che si ha

$$\frac{a^m - b^m}{a - b} < m\,a^{m-1},$$

da cui

$$b^m > a^{m-1}\,[a - m\,(a - b)];$$

se quindi facciamo $a = 1$, $b = \left[1 - \left(\frac{x}{m}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$, avremo

$$1 > \left[\varphi\left(\frac{x}{m}\right)\right]^m > 1 - [m - (m^2 - y^2)^{\frac{1}{2}}],$$

ovvero

$$1 > \left[\varphi\left(\frac{x}{m}\right)\right]^m > 1 - \frac{x^2}{m + (m^2 - y^2)^{\frac{1}{2}}};$$

da cui per $m = \infty$ si ottiene l'equazione (4).

2° Reciprocamente l'equazioni (1) sono conseguenza dell'equazioni (2), (3) e (4).

Infatti per l'equazioni (2) si ha

$$\frac{\varphi[(n+1)x]}{[\varphi(x)]^{n+1}} = \frac{\varphi(nx)}{[\varphi(x)]^n} - \frac{\psi(nx)}{[\varphi(x)]^n}\frac{\psi(x)}{\varphi(x)},$$

$$\frac{\psi[(n+1)x]}{[\varphi(x)]^{n+1}} = \frac{\psi(nx)}{[\varphi(x)]^n} + \frac{\varphi(nx)}{[\varphi(x)]^n}\frac{\psi(x)}{\varphi(x)}.$$

Se in queste formole facciamo successivamente $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$ troveremo

$$\frac{\varphi(2x)}{[\varphi(x)]^2} = 1 - \left[\frac{\psi(x)}{\varphi(x)}\right]^2,$$

$$\frac{\varphi(3x)}{[\varphi(x)]^3} = 1 - 3\left[\frac{\psi(x)}{\varphi(x)}\right]^2,$$

$$\frac{\varphi(4x)}{[\varphi(x)]^4} = 1 - 6\left[\frac{\psi(x)}{\varphi(x)}\right]^2 + \left[\frac{\psi(x)}{\varphi(x)}\right]^4,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\frac{\psi(2x)}{[\varphi(x)]^2} = 2\frac{\psi(x)}{\varphi(x)},$$

$$\frac{\psi(3x)}{[\varphi(x)]^3} = 3\frac{\psi(x)}{\varphi(x)} - \left[\frac{\psi(x)}{\varphi(x)}\right]^3,$$

$$\frac{\psi(4x)}{[\varphi(x)]^4} = 4\frac{\psi(x)}{\varphi(x)} - 4\left[\frac{\psi(x)}{\varphi(x)}\right]^3,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Queste formole sono casi particolari delle seguenti

$$(5)\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\varphi(mx)}{[\varphi(x)]^m} &= m_0 - m_2\left[\frac{\psi(x)}{\varphi(x)}\right]^2 + m_4\left[\frac{\psi(x)}{\varphi(x)}\right]^4 - \cdots \\ \frac{\psi(mx)}{[\varphi(x)]^m} &= m_1\frac{\psi(x)}{\varphi(x)} - m_3\left[\frac{\psi(x)}{\varphi(x)}\right]^3 + m_5\left[\frac{\psi(x)}{\varphi(x)}\right]^5 - \cdots, \end{aligned} \right.$$

quindi per provare la generalità delle ultime due equazioni basta dimostrare che se sono vere pel numero m saranno altresì vere pel numero seguente $m+1$.

Infatti si ha

$$\frac{\varphi[(m+1)x]}{[\varphi(x)]^{m+1}} = \frac{\varphi(mx)}{[\varphi(x)]^m} - \frac{\psi(mx)}{[\varphi(x)]^m}\frac{\psi(x)}{\varphi(x)}$$

$$= m_0 + \sum_{n=1} (-1)^n (m_{2n} + m_{2n-1})\left[\frac{\psi(x)}{\varphi(x)}\right]^{2n},$$

$$\frac{\psi[(m+1)x]}{[\varphi(x)]^{m+1}} = \frac{\psi(mx)}{[\varphi(x)]^m} + \frac{\varphi(mx)}{[\varphi(x)]^m}\frac{\psi(x)}{\varphi(x)}$$

$$= \sum_{n=0} (-1)^n (m_{2n} + m_{2n+1})\left[\frac{\psi(x)}{\varphi(x)}\right]^{2n+1};$$

ma è noto che

$$m_{n-1} + m_n = (m+1)_n,$$

quindi

$$\frac{\varphi[(m+1)x]}{[\varphi(x)]^{m+1}} = \sum_{n=0} (-1)^n (m+1)_{2n}\left[\frac{\psi(x)}{\varphi(x)}\right]^{2n},$$

$$\frac{\psi[(m+1)x]}{[\varphi(x)]^{m+1}} = \sum_{n=0} (-1)^n (m+1)_{2n+1}\left[\frac{\psi(x)}{\varphi(x)}\right]^{2n+1};$$

e queste formole non differiscono dalle (5) che per la sostituzione di $m+1$ invece di m.

Ciò posto sostituendo nelle (5) $\frac{x}{m}$ per x avremo

$$\frac{\varphi(x)}{\left[\varphi\left(\frac{x}{m}\right)\right]^m} = \sum_{n=0} (-1)^n \frac{m_{2n}}{m^{2n}} \left[\frac{m\,\psi\left(\frac{x}{m}\right)}{\varphi\left(\frac{x}{m}\right)}\right]^{2n},$$

$$\frac{\psi(x)}{\left[\varphi\left(\frac{x}{m}\right)\right]^m} = \sum_{n=0} (-1)^n \frac{m_{2n+1}}{m^{2n+1}} \left[\frac{m\,\psi\left(\frac{x}{m}\right)}{\varphi\left(\frac{x}{m}\right)}\right]^{2n+1};$$

e da queste due equazioni si deducono immediatamente l'equazioni (1), ragionando come nel n° 175 e avendo riguardo alle formole (3) e (4).

197. Nella Trigonometria è stato dimostrato che $\cos x$ e $\operatorname{sen} x$ soddisfano all'equazioni (2), (3) e (4); dunque sono identiche con le funzioni $\varphi(x)$ e $\psi(x)$, e per conseguenza avremo

$$(6) \qquad \cos x = \sum_0^\infty (-1)^n \frac{x^{2n}}{\Pi(2n)}, \quad \operatorname{sen} x = \sum_0^\infty (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{\Pi(2n+1)}.$$

Se ora indichiamo con $\tan x, \cot x, \cos x, \operatorname{cosec} x$ delle funzioni definite dall'equazioni

$$\tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}, \quad \cot x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}, \quad \sec x = \frac{1}{\cos x}, \quad \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\operatorname{sen} x},$$

sarebbe facile, usando le formole che abbiamo dato nel Capitolo 4°, trovare le serie corrispondenti a queste altre quattro funzioni goniometriche; ma noi ritorneremo sopra questo argomento nel Capitolo 11°.

198. Il metodo che abbiamo adoperato nei n[i] precedenti mostra come si possano dedurre analiticamente talune fra le proprietà delle funzioni goniometriche; seguendo la stessa via si possono dimostrare tutte le proprietà di queste funzioni senza punto fare uso della Geometria. Per darne un saggio, osserviamo che

dalla semplice considerazione delle serie (6) si deducono immediatamente le seguenti proprietà delle funzioni $\cos x$ e $\operatorname{sen} x$,

$$(7)\quad \cos 0 = 1,\ \operatorname{sen} 0 = 0,\ \cos(-x) = \cos x,\ \operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x.$$

Inoltre facendo $x = y$ nell' equazione

$$\cos(x - y) = \cos x \cos y + \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y\ ,$$

avremo

$$(8)\qquad 1 = \cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x.$$

Dall' equazioni (6) poi si ricava

$$\cos x + i \operatorname{sen} x = \sum_0^\infty (-1)^n \left[\frac{x^{2n}}{\Pi(2n)} + i\, \frac{x^{2n+1}}{\Pi(2n+1)}\right].$$

Ora il secondo membro di questa eguaglianza è uguale a e^{ix} (177), quindi

$$(9)\qquad \cos x + i \operatorname{sen} x = e^{ix}.$$

Parimente avremo

$$\cos x - i \operatorname{sen} x = e^{-ix}.$$

Dalla combinazione di queste due equazioni risulta

$$(10)\qquad \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\ ,\quad \operatorname{sen} x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\ ,$$

relazioni notevoli fra il coseno e il seno di un arco reale e le funzioni esponenziali immaginarie e^{ix}, e e^{-ix}, dovute ad Eulero.

Per mezzo dell' equazione (9) si ottengono le seguenti

$$\cos m x + i \operatorname{sen} m x = e^{imx}\ ,$$

$$[\cos x + i \operatorname{sen} x]^m = e^{imx}\ ,$$

da cui

$$(11)\qquad [\cos x + i \operatorname{sen} x]^m = \cos m x + i \operatorname{sen} m x\ ,$$

che è la formola di Moivre. Se si ha $m = \frac{p}{q}$, il secondo membro di questa formola ha q valori differenti come il primo. (40)

199. *Le funzioni* cos x *e* sen x *sono funzioni continue di* x, poichè sono sviluppabili in serie che procedono secondo le potenze intere e positive di x.

Vi è un numero compreso fra 0 *e* 2, *che sostituito in luogo di* x *annulla* cos x.

Indichiamo con π il doppio di questo numero. Dalla prima delle formole (6), si deduce

$$\cos 2 = -\frac{1}{3} - \sum_{1}^{\infty} \frac{2^{4n+2}}{\Pi(4n+2)} \left[1 - \frac{2^2}{(4n+3)(4n+4)}\right],$$

da cui $\cos 2 < 0$.

Ma $\cos 0 = 1$, ed inoltre $\cos x$ è una funzione continua di x; dunque vi dev'essere un numero $\frac{\pi}{2}$ compreso fra 0 e 2 pel quale

$$\cos \frac{\pi}{2} = 0.$$

Dall'equazione (8) si ha $sen \frac{\pi}{2} = \pm 1$. Per vedere quale dei due segni dobbiamo scegliere, osserviamo che

$$sen \frac{\pi}{2} = \sum_{0}^{\infty} (-1)^n \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n+1}}{\Pi(2n+1)} = \sum_{0}^{\infty} \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^{4n+1}}{\Pi(4n+1)} \left[1 - \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}{(4n+2)(4n+3)}\right];$$

ma

$$\frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}{(4n+2)(4n+3)} < 1;$$

dunque $sen \frac{\pi}{2}$ è una quantità positiva e per conseguenza

$$sen \frac{\pi}{2} = 1.$$

Le funzioni cos x *e* sen x *sono eguali rispettivamente a* 0 *e a* ± 1 *per gl' infiniti valori di* x *che si deducono dalla formola* $x = \frac{2n+1}{2}\pi$, *facendo* $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$

Se nell' equazione (11) facciamo $x = \frac{\pi}{2}$, $m = 2n+1$, otterremo

$$\cos\frac{2n+1}{2}\pi + i\,\text{sen}\,\frac{2n+1}{2}\pi = \left[\cos\frac{\pi}{2} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{2}\right]^{2n+1} = (-1)^n\, i\,,$$

da cui

$$(12) \qquad \cos\frac{2n+1}{2}\pi = 0\,, \quad \text{sen}\,\frac{2n+1}{2}\pi = (-1)^n.$$

Le funzioni cos x *e* sen x *sono eguali rispettivamente a* ± 1 *e a* 0 *per gl' infiniti valori di* x *contenuti nella formola* $2n\pi$.

Se nella formola (11) sostituiamo $\frac{\pi}{2}$ per x e $2n$ per m, avremo

$$\cos n\pi + i\,\text{sen}\, n\pi = \left[\cos\frac{\pi}{2} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{2}\right]^{2n} = (-1)^n\,,$$

da cui

$$(13) \qquad \cos n\pi = (-1)^n\,, \quad \text{sen}\, n\pi = 0.$$

Le funzioni cos x *e* sen x *sono periodiche e il periodo è* 2π.

Una funzione $f(x)$ si dice periodica se soddisfa all' equazione

$$f(x) = f(x+h)\,,$$

ove h è una costante, che si chiama *periodo*.

Ciò posto, sostituendo nell'equazioni (2) $2n\pi$ per y, si trova

$$\cos(x \pm 2n\pi) = \cos x\,, \quad \text{sen}\,(x \pm 2n\pi) = \text{sen}\, x.$$

Pel calcolo numerico delle funzioni $\cos x$ e $\operatorname{sen} x$, basta conoscere i valori di queste funzioni corrispondenti ai valori di x compresi fra 0 e $\frac{\pi}{2}$. Infatti si ha

$$\cos\left(x+\frac{(2n+1)}{2}\pi\right)=(-1)^{n+1}\operatorname{sen} x\,,\ \operatorname{sen}\left(x+\frac{2n+1}{2}\pi\right)=(-1)^n\cos x\,,$$

$$\cos(x+n\pi)=(-1)^n\cos x\,,\quad \operatorname{sen}(x+n\pi)=(-1)^n\operatorname{sen} x\,;$$

e da queste formole apparisce manifesto che i valori di $\cos x$ e di $\operatorname{sen} x$ sono conosciuti, tostochè sono noti i valori delle medesime funzioni per x compreso fra 0 e $\frac{\pi}{2}$.

Serie che danno il seno e il coseno di un arco multiplo in funzione delle potenze del seno e del coseno dell'arco semplice.

200. Nel n° 196 abbiamo trovato le serie corrispondenti a $\cos m x$ e $\operatorname{sen} m x$, quando m è un numero intero e positivo; proponiamoci ora di risolvere la medesima quistione per qualunque valore reale di m. A tale oggetto ci gioveremo delle formole (162)

$$(14)\quad\begin{cases}(1+2z\cos\theta+z^2)^{\frac{m}{2}}\cos\left(m \operatorname{arc}\tan\dfrac{z\operatorname{sen}\theta}{1+z\cos\theta}\right)=\sum_{n=0}^{n=\infty} m_n z^n\cos n\theta\,,\\ (1+2z\cos\theta+z^2)^{\frac{m}{2}}\operatorname{sen}\left(m \operatorname{arc}\tan\dfrac{z\operatorname{sen}\theta}{1+z\cos\theta}\right)=\sum_{n=0}^{n=\infty} m_n z^n\operatorname{sen} n\theta\,,\end{cases}$$

che sussistono per tutti i valori di $z^2<1$.

Facciamo $\theta=\frac{\pi}{2}$, $\operatorname{arc}\tan z=x$; sostituendo e riducendo otterremo per tutti i valori di x compresi fra $-\frac{\pi}{4}$ e $+\frac{\pi}{4}$,

$$(15)\qquad \cos m x=\sum_{n=0}^{n=\infty}(-1)^n m_{2n}\operatorname{sen}^{2n} x\cos^{m-2n} x\,,$$

$$(16)\qquad \operatorname{sen} m x=\sum_{n=0}^{n=\infty}(-1)^n m_{2n+1}\operatorname{sen}^{2n+1} x\cos^{m-2n-1} x$$

Le serie che formano i secondi membri di queste formole, contengono le potenze decrescenti di *cos* x e le potenze crescenti di *sen* x; se vogliamo ordinarle rispetto alle potenze soltanto di *sen* x, potremo procedere nel seguente modo.

Cominciando dalla formola (15), si ha

$$cos^{m-2n} x = (1 - sen^2 x)^{\frac{m-2n}{2}} = \sum_{k=0}^{k=\infty} (-1)^k \left(\frac{m-2n}{2}\right)_k sen^{2k} x\,;$$

quindi sostituendo nella formola (15),

$$cos\, m\, x = \sum_{n=0}^{n=\infty} \sum_{k=0}^{k=\infty} (-1)^{n+k} m_{2n} \left(\frac{m-2n}{2}\right)_k sen^{2n+2k} x$$

$$= 1 - \left(\frac{m}{2}\right)_1 sen^2 x + \cdots\cdots + (-1)^n \left(\frac{m}{2}\right)_n sen^{2n} x \pm \cdots\cdots$$

$$- m_2 \left(\frac{m-2}{2}\right)_0 sen^2 x + \cdots\cdots + (-1)^n m_2 \left(\frac{m-2}{2}\right)_{n-1} sen^{2n} x \pm \cdots\cdots$$

$$+ \cdots\cdots + (-1)^n m_4 \left(\frac{m-4}{2}\right)_{n-2} sen^{2n} x \pm \cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+ (-1)^n m_{2n} \left(\frac{m-2n}{2}\right)_0 sen^{2n} x \pm \cdots\cdots$$

$$\pm \cdots\cdots$$

Ora per tutti i valori di x compresi fra $-\frac{\pi}{4}$ e $+\frac{\pi}{4}$ la serie doppia contenuta nel secondo membro è convergente, e quindi si possono eseguire le somme per colonne verticali; per conseguenza il termine generale dello sviluppo in serie di *cos* $m\,x$ sarà

$$(-1)^n sen^{2n} x \sum_{k=0}^{k=n} m_{2k} \left(\frac{m-2k}{2}\right)_{n-k},$$

talchè

$$cos\, m\, x = \sum_{n=0}^{n=\infty} (-1)^n sen^{2n} x \sum_{k=0}^{k=n} m_{2k} \left(\frac{m-2k}{2}\right)_{n-k}.$$

Ma nel Capitolo 7° abbiamo trovato la formola

$$\sum_{k=0}^{k=n} m_{2k}\left(\frac{m-2k}{2}\right)_{n-k}=\frac{m^2(m^2-2^2)(m^2-4^2)\dots(m^2-(2n-2)^2)}{1\,.\,2\,.\,3\dots(2n)},$$

quindi avremo

$$(17)\qquad \cos m\,x=\sum_{n=0}^{n=\infty}(-1^n)\frac{m^2(m^2-2^2)(m^2-4^2)\dots(m^2-(2n-2)^2)}{1\,.\,2\,.\,3\dots(2n)}\,sen^{2n}x.$$

La funzione $\cos m\, x$ si può sviluppare in un altro modo secondo le potenze ascendenti del seno. E invero dalla formola (15) si deduce

$$\frac{\cos m\,x}{\cos x}=\sum_{n=0}^{n=\infty}(-1)^n m_{2n}\,sen^{2n}x\cos^{m-2n-1}x$$

$$=\sum_{n=0}^{n=\infty}(-1)^n m_{2n}\,sen^{2n}x\,(1-sen^2x)^{\frac{m-2n-1}{2}}.$$

Procedendo come nel caso precedente troveremo

$$\frac{\cos m\,x}{\cos x}=\sum_{n=0}^{n=\infty}(-1)^n sen^{2n}x\sum_{k=0}^{k=n}m_{2k}\left(\frac{m-2k-1}{2}\right)_{n-k},$$

e poichè

$$\sum_{k=0}^{k=n}m_{2k}\left(\frac{m-2k+1}{2}\right)_{n-k}=\frac{(m^2-1^2)(m^2-3^2)\dots(m^2-(n-1)^2)}{1\,.\,2\,.\,3\dots(2n)},$$

ne segue

$$(18)\qquad \cos mx=\cos x\sum_{n=0}^{n=\infty}(-1)^n\frac{(m^2-1^2)(m^2-3^2)\dots(m^2-(2n-1)^2)}{1.2.3\dots 2n)}sen^{2n}x.$$

Lo stesso procedimento si applica all'equazione (16). Si ha

$$sen\,m\,x=\sum_{n=0}^{n=\infty}(-1)^n m_{2n+1}\,sen^{2n+1}x\,(1-sen^2x)^{\frac{m-2n-1}{2}},$$

e sostituendo per $(1-sen^2 x)^{\frac{m-2n-1}{2}}$ la serie corrispondente

$$sen\, m\, x =$$

$$m_1\, sen\, x - m_1\left(\frac{m-1}{2}\right)_1 sen^3 x + \cdots + (-1)^n m_1 \left(\frac{m-1}{2}\right)_n sen^{2n+1} x + \cdots,$$

$$-m_3\left(\frac{m-3}{2}\right)_0 sen^3 x + \cdots + (-1)^n m_3 \left(\frac{m-3}{2}\right)_{n-1} sen^{2n+1} x + \cdots,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+(-1)^n m_{2n+1}\left(\frac{m-2n-1}{2}\right)_0 sen^{2n+1} x + \cdots,$$

$$+\cdots.$$

Il termine generale di questa serie è

$$(-1)^n sen^{2n+1} x \sum_{k=0}^{k=n} m_{2k+1}\left(\frac{m-2k-1}{2}\right)_{n-k},$$

talchè

$$sen\, m\, x = \sum_{n=0}^{n=\infty} (-1)^n sen^{2n+1} x \sum_{k=0}^{k=n} m_{2k+1}\left(\frac{m-2k-1}{2}\right)_{n-k}.$$

Ma

$$\sum_{k=0}^{k=n} m_{2k+1}\left(\frac{m-2k-1}{2}\right)_{n-k} = \frac{m(m^2-1^2)(m^2-3^2)\ldots(m^2-(2n-1)^2)}{1.2.3\ldots(2n+1)};$$

e per conseguenza

$$(19)\quad sen\, m\, x = \sum_{n=0}^{n=\infty}(-1)^n \frac{m(m^2-1^2)(m^2-3^2)\ldots(m^2-(2n-1)^2)}{1.2.3\ldots(2n+1)} sen^{2n+1} x.$$

Parimente dalla formola (16) si ricava

$$\frac{sen\, m\, x}{cos\, x} = \sum_{n=0}^{n=\infty}(-1)^n m_{2n+1}\, sen^{2n+1} x\, cos^{m-2n-2} x$$

$$= \sum_{n=0}^{n=\infty}(-1)^n m_{2n+1}(1-sen^2 x)^{\frac{m-2n-2}{2}} sen^{2n+1} x$$

$$= \sum_{n=0}^{n=\infty}(-1)^n sen^{2n+1} x \sum_{k=0}^{k=n} m_{2k+1}\left(\frac{m-2k-2}{2}\right)_{n-k},$$

e poichè

$$\sum_{k=0}^{k=n} m_{2k+1}\left(\frac{m-2k-2}{2}\right)_{n-k}=\frac{m(m^2-2^2)(m^2-4^2)\dots(m^2-(2n)^2)}{1.2.3\dots(2n+1)};$$

avremo

$$(20)\quad sen\, m x = cos\, x \sum_{n=0}^{n=\infty}(-1)^n \frac{m(m^2-2^2)(m^2-4^2)\dots(m^2-(2n)^2)}{1.2.3\dots(2n+1)} sen^{2n+1} x.$$

Le formole (17), (18), (19) e (20) sussistono per qualunque valore di m se x è compreso fra $-\frac{\pi}{4}$ e $+\frac{\pi}{4}$; e per qualunque valore di x se m è un numero intero e positivo. Se m è un numero pari, le serie contenute nelle formole (17) e (20) sono finite; se m è un numero dispari, la stessa osservazione vale per le formole (18) e (19).

201. È facile provare che le quattro formole precedenti sussistono altresì pei valori di x compresi fra $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$. Infatti, facendo nella prima di esse $m=2\mu$, $x=\frac{1}{2}y$, troveremo

$$cos\,\mu y = 1-\frac{\mu^2}{1.2}\left(2\, sen\frac{1}{2}y\right)^2+\frac{\mu^2(\mu^2-1^2)}{1.2.3.4}\left(2\, sen\frac{1}{2}y\right)^4$$

$$-\frac{\mu^2(\mu^2-1^2)(\mu^2-2^2)}{1.2.3.4.5.6}\left(2\, sen\frac{1}{2}y\right)^6+\dots,$$

y essendo soggetta alla condizione $-\frac{1}{2}\pi < y < +\frac{1}{2}\pi$.

Ora si ha

$$2\, sen^2\frac{1}{2}y = 1-cos\, y = 1-\sqrt{1-sen^2 y},$$

ove il segno radicale è preso positivamente, poichè nell' intervallo

compreso fra $-\frac{\pi}{2}$ e $+\frac{\pi}{2}$ il coseno ha sempre un valore positivo. Facendo uso della formola del binomio si trova

$$\left(2\, sen\, \frac{1}{2} y\right)^2 = sen^2 y + \frac{1}{2}\frac{sen^4 y}{2} + \frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\frac{sen^6 y}{3} + \cdots ;$$

se prendiamo le potenze successive di questa serie e sostituiamo i risultati corrispondenti nel valore di $cos\, \mu\, y$, avremo

$$\begin{aligned} cos\, \mu\, y = 1 &- \frac{\mu^2}{1\,.\,2}\left(sen^2 y + \frac{1}{2}\frac{sen^4 y}{2} + \frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\frac{sen^6 y}{3} + \cdots\right) \\ &+ \frac{\mu^2(\mu^2 - 1^2)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}\left(sen^4 y + \frac{1}{2} sen^6 y + \cdots\right) \\ &- \frac{\mu^2(\mu^2 - 1^2)(\mu^2 - 2^2)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5\,.\,6}(sen^6 y + \cdots) \\ &+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

La serie doppia del secondo membro è convergente, quindi potremo sommare per verticali; ed otterremo

$$cos\, \mu\, y = 1 - \frac{\mu^2}{1\,.\,2} sen^2 y + \frac{\mu^2(\mu^2 - 2^2)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4} sen^4 y - \cdots,$$

ovvero mutando μ in m, y in x,

$$cos\, m\, x = 1 - \frac{m^2}{1\,.\,2} sen^2 x + \frac{m^2(m^2 - 2^2)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4} sen^4 x - \cdots$$

Questa formola deve necessariamente essere identica colla (17) pei valori di x compresi fra $-\frac{\pi}{4}$ e $+\frac{\pi}{4}$; quindi il ragionamento precedente prova che la formola (17) sussiste anche quando si ha $-\frac{\pi}{2} < x < +\frac{\pi}{2}$. Considerazioni analoghe si possono applicare all'equazioni (18) (19) e (20).

202. Se nelle formole (17) (18) (19) e (20) poniamo $\frac{\pi}{2}-x$ invece di x otterremo le quattro equazioni

$$(21)\quad \left\{ \begin{aligned} &\cos m\left(\frac{\pi}{2}-x\right) \\ &= \sum_{n=0}^{n=\infty} (-1)^n \frac{m^2(m^2-2^2)(m^2-4^2)\dots(m^2-(2n-2)^2)}{1\,.\,2\,.\,3\,\dots\,(2n)} \cos^{2n} x\,, \end{aligned} \right.$$

$$(22)\quad \left\{ \begin{aligned} &\cos m\left(\frac{\pi}{2}-x\right) \\ &= \operatorname{sen} x \sum_{n=0}^{n=\infty} (-1)^n \frac{(m^2-1^2)(m^2-3^2)\dots(m^2-2n-1)^2)}{1\,.\,2\,.\,3\,\dots\,(2n)} \cos^{2n} x\,, \end{aligned} \right.$$

$$(23)\quad \left\{ \begin{aligned} &\operatorname{sen} m\left(\frac{\pi}{2}-x\right) \\ &= \sum_{n=0}^{n=\infty} (-1)^n \frac{m(m^2-1^2)(m^2-3^2)\dots(m^2-(2n-1)^2)}{1\,.\,2\,.\,3\,\dots\,(2n+1)} \cos^{2n+1} x\,, \end{aligned} \right.$$

$$(24)\quad \left\{ \begin{aligned} &\operatorname{sen} m\left(\frac{\pi}{2}-x\right) \\ &= \operatorname{sen} x \sum_{n=0}^{n=\infty} (-1)^n \frac{m(m^2-2^2)(m^2-4^2)\dots(m^2-(2n)^2)}{1\,.\,2\,.\,3\,\dots\,(2n+1)} \cos^{2n+1} x, \end{aligned} \right.$$

ove i secondi membri procedono secondo le potenze ascendenti di $\cos x$.

203. Se m è un numero intero le serie contenute nelle formole (21) e (24) sono finite se m è un numero pari, e quelle delle formole (22) e (23) se m è un numero dispari. Ora se osserviamo che per m pari si ha

$$\cos m\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = (-1)^{\frac{m}{2}} \cos m x,\quad \operatorname{sen} m\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = (-1)^{\frac{m-2}{2}} \operatorname{sen} m x,$$

e per m dispari

$$\cos m\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=(-1)^{\frac{m-1}{2}}\operatorname{sen} m x,\quad \operatorname{sen} m\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=(-1)^{\frac{m-1}{2}}\cos m x,$$

le formole (21) e (23) diventano

$$(-1)^{\frac{m}{2}}\cos m x=1-\frac{m^2}{1.2}\cos^2 x+\frac{m^2(m^2-2^2)}{1.2.3.4}\cos^4 x-\cdots$$
$$+(-1)^{\frac{m}{2}}\frac{m^2(m^2-2^2)\ldots(m^2-(m-2)^2)}{1.2\ldots m}\cos^m x\,.$$

$$(-1)^{\frac{m-1}{2}}\cos m x=\frac{m}{1}\cos x-\frac{m(m^2-1^2)}{1.2.3}\cos^3 x+\cdots$$
$$+(-1)^{\frac{m-1}{2}}\frac{m(m^2-1^2)\ldots(m^2-(m-2)^2)}{1.2.3\ldots m}\cos^m x.$$

Se moltiplichiamo la prima per $(-1)^{\frac{m}{2}}$, la seconda per $(-1)^{\frac{m-1}{2}}$ e scriviamo i secondi membri in ordine inverso, otterremo evidentemente le seguenti equazioni

$$\cos m x=\sum_{h=0}^{h=\frac{m}{2}}(-1)^h\frac{m^2(m^2-2^2)\ldots(m^2-(m-2h-2)^2)}{1.2\ldots(m-2h)}\cos^{m-2h}x\,,$$

$$\cos m x=\sum_{h=0}^{h=\frac{m-1}{2}}(-1)^h\frac{m(m^2-1^2)\ldots(m^2-(m-2h-2)^2)}{1.2\ldots(m-2h)}\cos^{m-2h}x\,.$$

Ora (165) i coefficienti di $(-1)^h\cos^{m-2h}$ sono entrambi eguali a 2^{m-1} per $h=0$ e a $(m-h-1)_{h-1}\frac{m}{h}2^{m-2h-1}$ per tutti gli altri valori di h; quindi le due formole precedenti si riducano ad una sola

$$(25)\left\{\begin{aligned}2\cos m x=&(2\cos x)^m-\frac{m}{1}(2\cos x)^{m-2}+\frac{m(m-3)}{1.2}(2\cos x)^{m-4}\\&-\frac{m(m-4)(m-5)}{1.2.3}(2\cos x)^{m-6}\ldots,\end{aligned}\right.$$

che vale tanto per m pari quanto per m dispari e il cui secondo membro termina quando finiscono le potenze positive di $\cos x$.

Parimente le formole (22) e (24) diventano

$$(-1)^{\frac{m-1}{2}} \operatorname{sen} m x = \operatorname{sen} x \left[1 - \frac{m^2-1^2}{1 \cdot 2} \cos^2 x + \frac{(m^2-1^2)(m^2-3^2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cos^4 x^{m-1} - \dots \right.$$

$$\left. + (-1)^{\frac{m-1}{2}} \frac{(m^2-1^2)(m^2-3^2) \dots (m^2-(m-2)^2)}{1 \cdot 2 \dots (m-1)} \cos^{m-1} x \right],$$

$$(-1)^{\frac{m-2}{2}} \operatorname{sen} m x = \operatorname{sen} x \left[\frac{m}{1} \cos x - \frac{m(m^2-2^2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cos^3 x + \dots \right.$$

$$\left. + (-1)^{\frac{m-2}{2}} \frac{m(m^2-2^2) \dots (m^2-(m-2)^2)}{1 \cdot 2 \dots (m-1)} \cos^{m-1} x \right].$$

Moltiplicando la prima per $(-1)^{\frac{m-1}{2}}$ la seconda per $(-1)^{\frac{m-2}{2}}$ e invertendo l'ordine dei termini nei secondi membri, avremo

$$\operatorname{sen} m x = \operatorname{sen} x \sum_{h=0}^{h=\frac{m-1}{2}} (-1)^h \frac{(m^2-1^2)(m^2-3^2) \dots (m^2-(m-2h-2)^2)}{1 \cdot 2 \dots (m-2h-1)} \cos^{m-2h-1} x,$$

$$\operatorname{sen} m x = \operatorname{sen} x \sum_{h=0}^{h=\frac{m-2}{2}} (-1)^h \frac{m(m^2-2^2) \dots (m^2-(m-2h-2)^2)}{1 \cdot 2 \dots (m-2h-1)} \cos^{m-2h-1} x.$$

Ma l'espressioni che moltiplicano $(-1)^h \cos^{m-2h-1}$ sono entrambe eguali a 2^{m-1} per $h=0$ e a $(m-h-1)_h\, 2^{m-2h-1}$ per tutti gli altri valori di h; dunque le due formole precedenti si riducono alla sola

$$(26) \quad \left\{ \begin{aligned} \operatorname{sen} m x = \operatorname{sen} x & \left[(2\cos x)^{m-1} - \frac{m-2}{1} (2 \cos x)^{m-3} \right. \\ & \left. + \frac{(m-3)(m-4)}{1 \cdot 2} (2 \cos x)^{m-5} - \dots \right], \end{aligned} \right.$$

che sussiste tanto per m pari quanto per m dispari, e il cui se-

condo membro si arresta col termine che contiene la più piccola potenza positiva di $\cos x$.

Le formole (25) e (26) si potrebbero dedurre direttamente dalle formole (15) e (16) giovandosi delle relazioni (8) e (9) dimostrate nel Capitolo 7°.

204. Se facciamo $y = \cos x + i \operatorname{sen} x$, avremo

$$\frac{1}{y} = \cos x - i \operatorname{sen} x, \quad y + \frac{1}{y} = 2 \cos x, \; y^m + \frac{1}{y^m} = 2 \cos m x;$$

quindi la formola (25), se poniamo $y + \frac{1}{y} = z$ diventa

$$(27) \quad \left\{ \begin{aligned} y^m + \frac{1}{y^m} &= z^m - \frac{m}{1} z^{m-2} + \frac{m(m-3)}{1.2} z^{m-4} \\ &\quad - \frac{m(m-4)(m-5)}{1.2.3} z^{m-6} + \dots \end{aligned} \right.$$

Del resto questa formola che ha ancora delle altre applicazioni può dimostrarsi direttamente, ed allora la formola (25) ne sarà una conseguenza. Infatti la (27) può verificarsi agevolmente per $m = 2, 3, 4 \dots$, partendo dall'identità

$$y^m + \frac{1}{y^m} = \left(y^{m-1} + \frac{1}{y^{m-1}}\right) z - \left(y^{m-2} + \frac{1}{y^{m-2}}\right),$$

quindi per dimostrarne la verità per qualunque valore di m, basta provare che se ha luogo per l'esponente m si verifica altresì per l'esponente $m + 1$.

Ora osserviamo che il termine generale di $y^m + \frac{1}{y^m}$ è

$$\pm (m - h - 1)_{h-1} \frac{m}{h} 2^{m-2h},$$

e in virtù dell'ultima identità il termine generale di $y^{m+1} + \frac{1}{y^{m-1}}$, cioè il termine che contiene z^{m-2h+1} si ottiene moltiplicando il termine generale di $y^m + \frac{1}{y^m}$ per z e sottraendo da esso il ter-

mine generale di $y^{m-1}+\frac{1}{y^{m-1}}$ cioè $\pm(m-h-1)_{h-2}\frac{m-1}{h-1}z^{m-2h+1}$.
Quindi il termine generale di $y^{m+1}+\frac{1}{y^{m+1}}$ sarà

$$\pm\left[(m-h-1)_{h-1}\frac{m}{h}+(m-h-1)_{h-2}\frac{m-1}{h-1}\right]z^{m-2h+1}.$$

Il coefficiente di $\pm z^{m-2h+1}$ si può scrivere

$$\left[(m-h-1)_{h-1}\frac{m+1}{h}+(m-h-1)_{h-2}\frac{m+1}{h}\right]$$

$$-\left[(m-h-1)_{h-1}\frac{1}{h}-(m-h-1)_{h-2}\frac{m-2h+1}{h(h-1)}\right];$$

la quantità contenuta nella seconda parentesi è uguale a zero perchè

$$(m-h-1)_{h-1}=(m-h-1)_{h-2}\frac{m-2h+1}{h-1};$$

quindi l'espressione precedente si riduce a

$$(m-h)_{h-1}\frac{m+1}{h},$$

talchè il termine generale di $y^{m+1}+\frac{1}{y^{m+1}}$ sarà

$$\pm(m-h)_{h-1}\frac{m+1}{h}z^{m-2h+1},$$

che si deduce dal termine generale di $y^m+\frac{1}{y^m}$ sostituendo $m+1$ per m. Dunque la formola (27) è vera qualunque numero intero sia m. Un analogo procedimento si potrebbe adoperare per otte-

nere tutte le formole dimostrate in questo paragrafo per m intero. ([1])

205. Finalmente osserviamo che $\cos m\,x$ e $\operatorname{sen} m\,x$ si possono sviluppare in serie che procedono secondo le potenze ascendenti di $\tan x$. Infatti le formole (15) e (16) si possono scrivere

$$\cos m\,x = \cos^m x \sum_{n=0}^{n=\infty} (-1)^n\, m_{2n} \tan^{2n} x\,,$$

$$\operatorname{sen} m\,x = \cos^m x \sum_{n=0}^{n=\infty} (-1)^n\, m_{2n+1} \tan^{2n+1} x.$$

([1]) Se nella formola (27) facciamo $s = 1$, troveremo

$$\frac{1 - \left(y^m + \frac{1}{y^m}\right)}{m} = 1 - (m-3)_1 \frac{1}{2} + (m-4)_2 \frac{1}{3} - (m-5)_3 \frac{1}{4} + \cdots$$

Le radici dell'equazione $y^2 - y + 1 = 0$ sono

$$y = \cos\frac{\pi}{3} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\,, \quad \frac{1}{y} = \cos\frac{\pi}{3} - i \operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\,,$$

da cui $y + \frac{1}{y} = 2\cos\frac{\pi}{3} = 1$; ma $\cos\frac{\pi}{3} = -\cos\frac{2\pi}{3}$, $\operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = \operatorname{sen}\frac{2\pi}{3}$; quindi

$$y = -\cos\frac{2\pi}{3} + i \operatorname{sen}\frac{2\pi}{3}, \quad \frac{1}{y} = -\cos\frac{2\pi}{3} - i \operatorname{sen}\frac{2\pi}{3},$$

e per conseguenza $y^m + \frac{1}{y^m} = (\quad 1)^m\, 2\cos\frac{2m\pi}{3}$; talchè

$$\frac{1 + (-1)^{m+1}\, 2\cos\frac{2m\pi}{3}}{m} = 1 - (m-3)_1\frac{1}{2} + (m-4)_2\frac{1}{3} - (m-5)_3\frac{1}{4} + \cdots$$

Se $m = \sigma\, n \pm 1$, si ha $\cos\frac{2m\pi}{3} = -\frac{1}{2}$; quindi per questo valore di m si ha

$$0 = 1 - (m-3)_1\frac{1}{2} + (m-4)_2\frac{1}{3} - (m-5)_3\frac{1}{4} + \cdots$$

Ora è noto che qualunque numero primo, eccetto 2 e 3, è compreso nella formola $6\,n \pm 1$, quindi l'ultima relazione ha luogo se m indica un numero primo maggiore di 3.

Queste formole sussistono per tutti i valori di x compresi fra $-\frac{\pi}{4}$ e $+\frac{\pi}{4}$; ed anche per $x=\frac{\pi}{4}$, se m è un numero positivo; ma $\cos\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\tan\frac{\pi}{4}=1$, quindi avremo le due notevoli eguaglianze

$$(2)^{\frac{m}{2}} \cos m\frac{\pi}{4} = m_2 - m_4 + m_6 - m_8 + \cdots,$$

$$(2)^{\frac{m}{2}} \operatorname{sen} m\frac{\pi}{4} = m_1 - m_3 + m_5 - m_7 + \cdots$$

Serie che danno la potenza del coseno e del seno di un arco semplice in funzione dei coseni e seni degli archi multipli.

206. Se m è un numero intero e positivo la formola del binomio può scriversi nei due seguenti modi

$$(a+b)^m = \sum_{h=0}^{h=n-1} m_h (ab)^h (a^{m-2h} + b^{m-2h}) + m_n (ab)^n,$$

$$(a+b)^m = \sum_{h=0}^{h=n} m_h (ab)^h (a^{m-2h} + b^{m-2h}),$$

la prima ha luogo se $m=2n$ e la seconda se $m=2n+1$. Mutando in entrambe b in $-b$, avremo

$$(a-b)^m = \sum_{h=0}^{h=n-1} (-1)^h m_h (ab)^h (a^{m-2h} + b^{m-2h}) + (-1)^n m_n (ab)^n,$$

$$(a-b)^m = \sum_{h=0}^{h=n} (-1)^h m_h (ab)^h (a^{m-2h} - b^{m-2h}).$$

Ciò posto facciamo

$$a = \cos x + i \operatorname{sen} x, \quad b = \cos x - i \operatorname{sen} x,$$

da cui

$$a + b = 2\cos x,\quad a - b = 2\,i\,sen\,x,\quad a^p + b^p = 2\cos p\,x\,,$$

$$a^p - b^p = 2\,i\,sen\,p\,x,\quad ab = 1.$$

Sostituendo nelle formole precedenti avremo

$$m = 2n \begin{cases} 2^m \cos^m x = 2 \sum\limits_{h=0}^{h=n-1} m_h \cos(m-2h)x + m_n\,, \\ (-1)^n\, 2^m sen^m x = 2 \sum\limits_{h=0}^{h=n-1} (-1)^h m_h \cos(m-2h)x + (-1)^n m_n\,, \end{cases}$$

$$m = 2n+1 \begin{cases} 2^{m-1} \cos^m x = \sum\limits_{h=0}^{h=n} m_h \cos(m-2h)\,x\,, \\ (-1)^n\, 2^{m-1} sen^m x = \sum\limits_{h=0}^{h=n} (-1)^h m_h\, sen\,(m-2h)\,x. \end{cases}$$

207. Queste equazioni risolvono completamente la quistione quando m è un numero intero e positivo; per tutti gli altri valori positivi di m ci gioveremo delle formole (14) che sussistono per qualunque valore di m se $z < 1$, e per qualunque valore positivo di m se $z = 1$. Facendo quest'ultima sostituzione avremo

$$(2 + 2\cos\theta)^{\frac{m}{2}} \cos m \left(arc\,tan \frac{sen\,\theta}{1+\cos\theta}\right) = \sum m_n \cos n\,\theta\,,$$

$$(2 + 2\cos\theta)^{\frac{m}{2}}\, sen\, m \left(arc\,tan \frac{sen\,\theta}{1+\cos\theta}\right) = \sum m_n\, sen\, n\,\theta.$$

Poniamo

$$arc\,tan \frac{sen\,\theta}{1+\cos\theta} = \alpha\,;$$

avremo

$$tan\,\alpha = tan\,\frac{1}{2}\,\theta\,,$$

da cui segue

$$\frac{1}{2}\theta = \alpha + h\pi.$$

Ma α è compreso fra $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$, quindi $\frac{1}{2}\theta$ sarà compreso fra $h\pi - \frac{\pi}{2}$ e $h\pi + \frac{\pi}{2}$; talchè per questi valori di $\frac{1}{2}\theta$ avremo

$$(28)\quad \left\{\begin{aligned} &(2+2\cos\theta)^{\frac{m}{2}} \cos m\left(\frac{1}{2}\theta - h\pi\right) = \sum m_n \cos n\theta\,, \\ &(2+2\cos\theta)^{\frac{m}{2}} \operatorname{sen} m\left(\frac{1}{2}\theta - h\pi\right) = \sum m_n \operatorname{sen} n\theta. \end{aligned}\right.$$

Se indichiamo con μ un numero reale arbitrario e moltiplichiamo la prima di queste equazioni per $\cos\mu$, la seconda per $\operatorname{sen}\mu$ e sommiamo l' equazioni che ne risultano, otterremo

$$(29)\qquad (2+2\cos\theta)^{\frac{m}{2}} \cos\left(\mu + mh\pi - \frac{m}{2}\theta\right) = \sum m_n \cos(n\theta - \mu).$$

È noto che $2(1+\cos\theta) = \left(2\cos\frac{1}{2}\theta\right)^2 = \left(\pm 2\cos\frac{1}{2}\theta\right)^2$, talchè

$$(2+2\cos\theta)^{\frac{m}{2}} = \left(\pm 2\cos\frac{1}{2}\theta\right)^m;$$

ma il secondo membro dovendo essere positivo sempre poichè tale è il primo, ne segue che bisognerà prendere il segno superiore o l' inferiore secondochè $\cos\frac{1}{2}\theta$ sarà positivo o negativo, cioè secondo che $\frac{1}{2}\theta$ sarà compreso fra $2k\pi - \frac{\pi}{2}$ e $2k\pi + \frac{\pi}{2}$ o fra $2k\pi + \frac{\pi}{2}$ e $2k\pi + \frac{3\pi}{2}$. Quindi se facciamo $\frac{1}{2}\theta = x$ avremo dalla (29)

$$(30)\quad (2\cos x)^m \cos(\mu + 2mk\pi - mx) = \sum m_n \cos(2nx - \mu)\,,$$

per

$$h=2k,\quad 2k\pi-\frac{\pi}{2}<x<2k\pi+\frac{\pi}{2},$$

e

$$(31)\quad (-2\cos x)^m \cos(\mu+m(2k+1)\pi-mx)=\sum m_n \cos(2nx-\mu),$$

per $h=2k+1$, $2k\pi+\frac{\pi}{2}<x<2k\pi+\frac{3\pi}{2}$.

Poichè μ è un numero arbitrario, potremo determinarlo a piacere; se quindi facciamo $\mu=mx$, otterremo per

$$2k\pi-\frac{\pi}{2}<x<2k\pi+\frac{\pi}{2},$$

$$(32)\quad (2\cos x)^m \cos 2mk\pi=\sum m_n \cos(m-2n)x,$$

e per

$$2k\pi+\frac{\pi}{2}<x<2k\pi+\frac{3\pi}{2},$$

$$(33)\quad (-2\cos x)^m \cos m(2k+1)\pi=\sum m_n \cos(m-2n)x.$$

Se poniamo $\mu=mx+\frac{\pi}{2}$, le formole (30) e (31) daranno

$$(34)\quad (2\cos x)^m \operatorname{sen} 2mk\pi=\sum m_n \operatorname{sen}(m-2n)x,$$

se si ha

$$2k\pi-\frac{\pi}{2}<x<2k\pi+\frac{\pi}{2},$$

e

$$(35)\quad (-2\cos x)^m \operatorname{sen} m(2k+1)\pi=\sum m_n \operatorname{sen}(m-2n)x,$$

se

$$2k\pi+\frac{\pi}{2}<x<2k\pi+\frac{3\pi}{2}.$$

Nelle formole (30 (31) sostituiamo $x-\frac{\pi}{2}$ invece di x e po-

niamo una volta $\mu = mx$, e un'altra volta $\mu = mx + \frac{\pi}{2}$ avremo le nuove formole

$$(36)\begin{cases} (2\,sen\,x)^m \cos m\left(2k + \frac{1}{2}\right)\pi = \Sigma\,(-1)^n\, m_n \cos(m-2n)\,x\,, \\ (-2\,sen\,x)^m \cos m\left(2k + \frac{3}{2}\right)\pi = \Sigma\,(-1)^n\, m_n \cos(m-2n)\,x\,, \\ (2\,sen\,x)^m\, sen\, m\left(2k + \frac{1}{2}\right)\pi = \Sigma\,(-1)^n\, m_n\, sen\,(m-2n)\,x\,, \\ (-2\,sen\,x)^m\, sen\, m\left(2k + \frac{3}{2}\right)\pi = \Sigma\,(-1)^n\, m_n\, sen\,(m-2n)\,x\,, \end{cases}$$

e bisogna giovarsi della prima e della terza o della seconda e della quarta secondochè x è compreso fra

$$2k\pi - \frac{\pi}{2} \quad e \quad 2k\pi + \frac{\pi}{2},$$

o fra

$$2k\pi + \frac{\pi}{2} \quad e \quad 2k\pi + \frac{3\pi}{2}.$$

Finalmente osserviamo che facendo $k = 0$ nelle formole (32) e (34), avremo per tutti i valori di x compresi fra $-\frac{\pi}{2}$ e $+\frac{\pi}{2}$,

$$(37)\quad \begin{cases} (2\cos x)^m = \Sigma\, m_n \cos(m-2n)\,x \\ \qquad = \Sigma\, m_n\, sen\,(m-2n)\,x. \end{cases}$$

208. Per mostrare che le formole che abbiamo dato in questo paragrafo sussistono in tutti i casi, diamo qualche esempio.

1°. Si abbia $m = \frac{1}{3}$, $x = \pi$. In questo caso bisogna fare uso della formola (33), nella quale facendo $k = 0$, avremo

$$(-2\cos\pi)^{\frac{1}{3}} \cos\frac{\pi}{3} = \cos\frac{\pi}{3}\, \Sigma\left(\frac{1}{3}\right)_n,$$

che è una identità, poichè sappiamo che (163) $\Sigma\left(\frac{1}{3}\right)_n = 2^{\frac{1}{3}}$.

2°. Sia $x = \frac{\pi}{4}$. In questa ipotesi la prima delle formole (37) darà

$$\left(2\cos\frac{\pi}{4}\right)^m = \Sigma\, m_n \cos(m - 2n)\frac{\pi}{4}$$
$$= \cos m\frac{\pi}{4}\,\Sigma(-1)^n m_{2n} + \operatorname{sen} m\frac{\pi}{4}\,\Sigma(-1)^n m_{2n+1},$$

ovvero per le formole del n° 205

$$\left(2\cos\frac{\pi}{4}\right)^m = (\sqrt{2})^m \cos m\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right) = (\sqrt{2})^m,$$

risultato esatto.

3°. Sia $x = \frac{3}{4}\pi$. Dalla formola (33) si ricava

$$\left(-2\cos\frac{3}{4}\pi\right)^m \cos m\pi = \Sigma\, m_n \cos(m - 2n)\frac{3\pi}{4}$$
$$= \cos m\frac{3\pi}{4}\,\Sigma(-1)^n m_{2n} + \operatorname{sen} m\frac{3\pi}{4}\,\Sigma(-1)^n m_{2n+1}$$
$$= (\sqrt{2})^m \cos m\left(\frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right) = (\sqrt{2})^m \cos m\pi,$$

risultato esatto, poichè $\cos\frac{3}{4}\pi = -\frac{1}{\sqrt{2}}$.

4°. Si abbia $x = \frac{5\pi}{4}$. Dalla seconda delle formole (36) si ricava

$$\left(-2\operatorname{sen}\frac{5\pi}{4}\right)^m \cos m\frac{3\pi}{2} = \Sigma(-1)^n m_n \cos(m - 2n)\frac{5\pi}{4}$$
$$= (\sqrt{2})^m \cos m\left(\frac{5\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right)$$
$$= (\sqrt{2})^m \cos m\frac{3\pi}{2}.$$

Per altri particolari sugli argomenti trattati negli ultimi

due paragrafi, vedi Poinsot, *Recherches sur la théorie des fonctions angulaires*.

Funzioni goniometriche di una variabile complessa.

209. Le funzioni $cos(x+iy)$, $sen(x+iy)$, definite dall' equazioni

$$cos(x+iy)=\sum_0^\infty(-1)^n\frac{(x+iy)^{2n}}{\Pi\, 2n},$$

$$sen(x+iy)=\sum_0^\infty(-1)^n\frac{(x+iy)^{2n+1}}{\Pi\,(2n+1)},$$

godono proprietà analoghe a quelle delle funzioni $cos\, x$ e $sen\, x$.

Per provarlo facciamo $x=z\cos\varphi$, $y=z\, sen\,\varphi$, avremo

$$cos(z\cos\varphi+i\, z\, sen\,\varphi)$$

$$=\sum_0^\infty(-1)^n\frac{z^{2n}}{\Pi\, 2n}(cos\, 2n\,\varphi+i\, sen\, 2n\,\varphi),$$

$$sen(z\cos\varphi+i\, z\, sen\,\varphi)$$

$$=\sum_0^\infty(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{\Pi\,(2n+1)}(cos\,(2n+1)\,\varphi+i\, sen\,(2n+1)\,\varphi).$$

Ma nel Capitolo 8° abbiamo trovato le formole

$$\sum_0^\infty\frac{z^{2n}}{\Pi\, 2n}\cos 2n\,\theta=\frac{e^{z\cos\theta}+e^{-z\cos\theta}}{2}\cos(z\, sen\,\theta),$$

$$\sum_0^\infty\frac{z^{2n}}{\Pi\, 2n}sen\, 2n\,\theta=\frac{e^{z\cos\theta}-e^{-z\cos\theta}}{2}sen(z\, sen\,\theta),$$

$$\sum_0^\infty\frac{z^{2n+1}}{\Pi\,(2n+1)}sen\,(2n+1)\,\theta=\frac{e^{z\cos\theta}+e^{-z\cos\theta}}{2}sen(z\, sen\,\theta),$$

$$\sum_0^\infty\frac{z^{2n+1}}{\Pi\,(2n+1)}\cos(2n+1)\,\theta=\frac{e^{z\cos\theta}-e^{-z\cos\theta}}{2}\cos(z\, sen\,\theta);$$

se quindi facciamo $\theta = \frac{\pi}{2} - \varphi$ e abbiamo riguardo ai valori di x e di y, troveremo

$$\sum_0^\infty (-1)^n \frac{z^{2n}}{\Pi\, 2n} \cos 2n\,\varphi = \frac{e^y + e^{-y}}{2} \cos x,$$

$$\sum_0^\infty (-1)^n \frac{z^{2n}}{\Pi\, 2n} \operatorname{sen} 2n\,\varphi = -\frac{e^y - e^{-y}}{2} \operatorname{sen} x,$$

$$\sum_0^\infty (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{\Pi\,(2n+1)} \cos(2n+1)\,\varphi = \frac{e^y + e^{-y}}{2} \operatorname{sen} x,$$

$$\sum_0^\infty (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{\Pi\,(2n+1)} \operatorname{sen}(2n+1)\,\varphi = \frac{e^y - e^{-y}}{2} \cos x.$$

Sostituendo queste espressioni nei valori di $\cos(x + iy)$ e di $\operatorname{sen}(x + iy)$, avremo

$$\cos(x + iy) = \frac{e^y + e^{-y}}{2} \cos x - i\frac{e^y - e^{-y}}{2} \operatorname{sen} x,$$

$$\operatorname{sen}(x + iy) = \frac{e^y + e^{-y}}{2} \operatorname{sen} x + i\frac{e^y - e^{-y}}{2} \cos x.$$

Se in queste formole poniamo $x = 0$, otterremo

$$(38) \qquad \cos(iy) = \frac{e^y + e^{-y}}{2}, \quad \operatorname{sen}(iy) = i\frac{e^y - e^{-y}}{2},$$

e per conseguenza

$$(39) \quad \begin{cases} \cos(x + iy) = \cos x \cos(iy) - \operatorname{sen} x \operatorname{sen}(iy), \\ \operatorname{sen}(x + iy) = \operatorname{sen} x \cos(iy) + \cos x \operatorname{sen}(iy), \end{cases}$$

lo che prova che le formole per $\cos(x + y)$ e $\operatorname{sen}(x + y)$ sussistono anche se per y si sostituisce iy.

Più generalmente, se combiniamo l' equazioni (39) con quelle

che si deducono da esse sostituendo ad x e y due nuove variabili x' e y', troveremo facilmente

$$\cos(x+iy)\cos(x'+iy')-\operatorname{sen}(x+iy)\operatorname{sen}(x'+iy')$$

$$=\cos(x+x')\frac{e^{y+y'}+e^{-(y+y')}}{2}-i\operatorname{sen}(x+x')\frac{e^{y+y'}-e^{-(y+y')}}{2}$$

$$=\cos(x+x')\cos i(y+y')-\operatorname{sen}(x+x')\operatorname{sen} i(y+y')$$

$$=\cos[(x+x')+i(y+y')]=\cos[(x+iy)+(x'+iy')]$$

$$\operatorname{sen}(x+iy)\cos(x'+iy')+\cos(x+iy)\operatorname{sen}(x'+iy')$$

$$=\operatorname{sen}[(x+x')+i(y+y')]=\operatorname{sen}[(x+iy)+(x'+iy')];$$

dal che risulta che le formole per $\cos(x+y)$ e $\operatorname{sen}(x+y)$ valgono altresì per valori complessi di x e di y.

Dalle formole (38) ponendo $y-ix$ per y, si ricava

$$\cos(x+iy)=\frac{e^{ix-y}+e^{-(ix-y)}}{2},$$

$$\operatorname{sen}(x+iy)=i\frac{e^{ix-y}-e^{-(ix-y)}}{2},$$

formole analoghe a quelle che abbiamo trovato per $\cos x$ e $\operatorname{sen} x$.

Se per $\tan(x+iy)$, $\cot(x+iy)$, $\sec(x+iy)$, $\operatorname{cosec}(x+iy)$, adottiamo le definizioni delle funzioni corrispondenti di una variabile reale, troveremo pei valori di queste quantità formole simili a quelle date nella Trigonometria. Così per es.: si ha

$$\tan(x+iy)=\frac{\operatorname{sen} x\frac{e^y+e^{-y}}{2}+i\cos x\frac{e^y-e^{-y}}{2}}{\cos x\frac{e^y+e^{-y}}{2}-i\operatorname{sen} x\frac{e^y-e^{-y}}{2}};$$

moltiplicando numeratore e denominatore della frazione del secondo membro per

$$\cos x\frac{e^y+e^{-y}}{2}+i\operatorname{sen} x\frac{e^y-e^{-y}}{2},$$

troveremo

$$tan\,(x+iy)=\frac{2\,sen\,2x+i\,(e^{2y}-e^{-2y})}{2\cos 2x+\ (e^{2y}+e^{-2y})}$$

$$=\frac{sen\,2x\ +sen\,(2\,i\,y)}{\cos 2x\ +\cos\,(2\,i\,y)},$$

formola simile all' altra

$$tan\,(x+y)=\frac{sen\,2x+sen\,2y}{\cos 2x+\cos 2y}.$$

In modo analogo si troverebbero le formole

$$cot\,(x+i\,y)=\frac{sen\,2x-sen\,2\,iy}{-\cos 2x+\cos 2\,i\,y},$$

$$sec\,(x+i\,y)=\frac{2\cos\,(x-i\,y)}{\cos 2x+\cos 2\,i\,y},$$

$$cosec\,(x+i\,y)=2\,\frac{2\,sen\,(x-i\,y)}{-\cos x+\cos 2\,i\,y}.$$

Serie ciclometriche.

210. *La serie*

$$z+\frac{1}{2}\frac{z^3}{3}+\frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\frac{z^5}{5}+\frac{1\,.\,3\,.\,5}{2\,.\,4\,.\,6}\frac{z^7}{7}+\cdots,$$

è convergente indipendentemente dall' ordine dei termini per tutti i punti del piano che non si trovano al di fuori della circonferenza del cerchio di raggio 1.

Se indichiamo con ρ il modulo di z e facciamo

$$u_n=\frac{1\,.\,3\,.\,5\,....\,(2n-1)}{2\,.\,4\,.\,6\,....\,(2n)}\,\frac{\rho^{2n+1}}{(2n+1)};$$

troveremo

$$lim\,\frac{u_{n+1}}{u_n}=lim\left[\frac{(2n+1)^2}{(2n+2)\,(2n+3)}\rho^2\right]=\rho^2;$$

dunque la serie dei moduli è convergente se $\rho^2 < 1$, è divergente se $\rho > 1$. Laonde 1 è il raggio del cerchio di convergenza.

Sulla circonferenza di questo cerchio la serie dei moduli è

$$1 + \frac{1}{2}\frac{1}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\frac{1}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\frac{1}{7} + \cdots,$$

che nel n° 118 abbiamo veduto essere convergente; per conseguenza anche su questa circonferenza la serie proposta è convergente indipendentemente dall'ordine dei termini.

211. *Se z è una variabile reale che soddisfa alla relazione*

$$z^2 \leq 1,$$

si ha

$$(40) \qquad arc\,sen\,z = \sum_0^\infty \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots (2n)} \frac{z^{2n+1}}{2n+1}.$$

La formola

$$(41) \quad \frac{sen\,m\,x}{m} = \sum_0^\infty \frac{(1^2 - m^2)(3^2 - m^2) \ldots ((2n-1)^2 - m^2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (2n)} \frac{sen^{2n+1} x}{2n+1},$$

che abbiamo veduto sussistere per tutti i valori di x compresi fra $-\frac{\pi}{2}$ e $+\frac{\pi}{2}$, ha luogo anche se $x = \pm\frac{\pi}{2}$. Infatti osserviamo che facendo

$$u_n = \frac{(1^2 - m^2)(3^2 - m^2) \ldots ((2n-1)^2 - m)^2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (2n)} \frac{1}{2n+1},$$

si trova

$$lim \left[n - (n+1)\frac{u_{n+1}}{u_n} \right] = \frac{1}{2} > 0.$$

Dunque la serie del secondo membro è convergente anche se facciamo $sen\,x = \pm 1$; e per conseguenza l'equazione (41) sussiste altresì in questo caso.

Ora si ha

$$\lim_{m=0}\left[\frac{(1^2-m^2)(3^2-m^2)\ldots((2n-1)^2-m^2)}{1.2.3\ldots(2n)}\frac{1}{2n+1}\right]$$

$$=\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots(2n)}\frac{1}{2n+1};$$

talchè se facciamo $sen\,x=z$, vediamo che i termini della serie proposta sono limiti dei termini corrispondenti della serie (41); dunque la serie proposta deve avere per somma

$$\lim_{m=0}\left[\frac{sen\,m\,x}{m}\right]=x=arc\,sen\,z\,,$$

lo che dimostra la formola (40).

212. Un'altra serie per calcolare l'arco in funzione del seno si ottiene dall'equazione

$$\frac{sen\,mx}{m}=cos\,x\left[sen\,x-\frac{m^2-2^2}{1.2.3}sen^3x+\frac{(m^2-2^2)(m^2-4^2)}{1.2.3.4.5}sen^5x-\cdots\right]$$

facendo convergere m a zero; infatti si trova

$$x=cos\,x\left[sen\,x+\frac{2}{3}sen^3x+\frac{2.4}{3.5}sen^5x+\cdots\right].$$

Per $arc\,cos\,z$ si ha

$$arc\,cos\,z=\frac{\pi}{2}-arc\,sen\,z\,,$$

da cui segue

$$arc\,cos\,z=\frac{\pi}{2}-z-\frac{1}{2}\frac{z^3}{3}-\frac{1.3}{2.4}\frac{z^5}{5}-\ldots$$

213. Le potenze dell'arco superiori alla prima si potrebbero ottenere mediante le formole del Capitolo 4°; ma è preferibile seguire un'altra via.

Le due formole

$$sen\, m\, x = \sum (-1)^r \frac{m^{2r+1}\, x^{2r+1}}{\Pi\,(2r+1)},$$

$$sen\, m\, x = \sum (-1)^n \frac{m(m^2-1^2)(m^2-3^2)\dots(m^2-(2n-1)^2)}{\Pi\,(2n+1)} sen^{2n+1} x,$$

sussistono per tutti i valori di m, purchè nella seconda si supponga che x sia compresa fra $+\frac{\pi}{2}$ e $-\frac{\pi}{2}$. Per trovare il valore di x^{2n+1} espresso per mezzo di una serie che proceda secondo le potenze del seno ci gioveremo del teorema (112), in virtù del quale i coefficienti delle medesime potenze di m in queste serie debbono essere eguali fra loro. Se indichiamo con $C_{n,r}$ la somma delle combinazioni senza ripetizioni della classe r^{esima} degli n numeri

$$1^2,\ 3^2,\ 5^2,\ \dots\ (2n-1)^2,$$

avremo

$$(m^2-1^2)(m^2-3^2)\dots(m^2-(2n-1)^2)$$

$$= m^{2n} - C_{n,1}\, m^{2n-2} + C_{n,2}\, m^{2n-4} - \dots + (-1)^{n-r} C_{n,n-r}\, m^{2r} - \dots,$$

Quindi nel termine che contiene $sen^{2n+1} x$ il coefficiente di m^{2r+1} è

$$(-1)^r \frac{C_{n,n-r}\, sen^{2n+1} x}{\Pi\,(2n+1)};$$

talchè il coefficiente di m^{2r+1} nella seconda equazione si otterrà sommando tutte l'espressioni che risultano dalla precedente facendo $n=r,\ r+1,\ r+2, \dots$; per conseguenza avremo

$$x^{2r+1} = sen^{2r+1} x \left[1 + \sum_{p=1} \frac{C_{r+p,p}}{(2r+2)\dots(2r+2p+1)} sen^{2p} x\right].$$

Applicando lo stesso metodo alle due formole

$$\cos mx = \Sigma\,(-1)^r \frac{m^{2r}\,x^{2r}}{\Pi\,(2r)},$$

$$\cos mx = 1 + \Sigma (-1)^{n+1} \frac{m^2(m^2-2^2)(m^2-4^2)\ldots(m^2-4n^2)}{\Pi\,(2n+2)}\, sen^{2n+2}\,x,$$

si trovano le potenze pari di x.

Infatti si ha

$$(m^2-2^2)(m^2-4^2)\ldots(m^2-4\,n^2)$$

$$= m^{2n} - C_{n,1}\,m^{2n-2} + \cdots + (-1)^{n-r+1}\,C_{n,n-r+1}\,m^{2r-2} - \cdots$$

ove le C sono le somme delle combinazioni della classe r^{esima} degli elementi

$$2^2,\ 4^2,\ \ldots\ 4n^2;$$

il coefficiente di m^{2r} nel termine che contiene $sen^{2n+2}\,x$ è

$$(-1)^r \frac{C_{n,n-r+1}\,sen^{2n+2}\,x}{\Pi\,(2n+2)}.$$

Per ottenere tutti gli altri coefficienti bisogna fare in questa espressione $n = r-1,\ r,\ r+1,\ \ldots$; in guisa che avremo

$$x^{2r} = sen^{2r}\,x\left[1 + \sum_{p=1} \frac{C_{r+p-1,p}}{(2r+1)\ldots(2r+2p)}\, sen^{2p}\,x\right].$$

Così per es.: facendo $r=3$, avremo

$$x^6 = sen^6 x\left[1 + \frac{2^2+4^2+6^2}{7.8}\,sen^2 x + \frac{2^2.4^2+2^2.6^2+\ldots+6^2.8^2}{7.8.9.10}\,sen^4 x + \cdots\right]$$

$$x^7 = sen^7 x\left[1 + \frac{1^2+3^2+5^2+7^2}{8.9}\,sen^2 x + \frac{1.^2 3^2+1^2.5^2+\ldots+7^2.9^2}{8.9.10.11}\,sen^4 x + \ldots\right].$$

214. *La serie*

$$z - \frac{1}{3} z^3 + \frac{1}{5} z^5 - \frac{1}{7} z^7 + \cdots$$

è convergente indipendentemente dall' ordine dei termini nel cerchio di raggio 1; sulla circonferenza di questo cerchio è semplicemente convergente.

Infatti la serie dei moduli è convergente se $mod\, z$ è < 1, poichè il limite del rapporto di due termini consecutivi è uguale a $(mod\, z)^2$. Se $mod\, z = 1$, la serie dei moduli è divergente, ma la serie complessa è convergente poichè tali sono le serie reali che la compongono. Finalmente se si ha $mod\, z > 1$, la serie proposta è divergente, poichè i suoi termini finiscono per essere indefinitamente crescenti.

215. *Se* z *è una variabile reale che soddisfa alla relazione* $z^2 \leq 1$, si ha

$$(42) \qquad arc \tan z = z - \frac{1}{3} z^3 + \frac{1}{5} z^5 - \frac{1}{7} z^7 + \cdots$$

Nel n° 205 abbiamo trovato che

$$(a) \qquad \frac{sen\, m\, x}{m \cos^m x} = \Sigma (-1)^n \frac{m_{2n+1}}{m} \tan^{2n+1} x.$$

Se facciamo $z = \tan x$, questa uguaglianza sussiste per tutti i valori positivi di m se si ha $z^2 \leq 1$. Inoltre si ha

$$\lim_{m=0} \left[\frac{m_{2n+1}}{m}\right] = \frac{1}{2n+1}, \quad \lim_{m=0} \left[\frac{sen\, m\, x}{m \cos^m x}\right] = x = arc \tan z\ ;$$

quindi facendo $m = 0$ nell' eguaglianza (a) si ottiene la formola (42).

216. *Per tutti i valori di* z *superiori ad* 1, *si ha*

$$arc \tan z = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{z} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{z}\right)^3 - \frac{1}{5}\left(\frac{1}{z}\right)^5 + \cdots$$

Se nella formola

$$l(a+b\,i)=\frac{1}{2}\,l\,(a^2+b^2)+i\,arc\,tan\,\frac{b}{a},$$

trovata nel n° 185, poniamo $a=1$ e per b sostituiamo successivamente $+z$ e $-z$, troveremo

$$l(1+z\,i)=\frac{1}{2}\,l\,(1+z^2)+i\,arc\,tan\,z\,,$$

$$l(1-z\,i)=\frac{1}{2}\,l\,(1+z^2)-i\,arc\,tan\,z\,;$$

le quali formole sottratte l'una dall'altra danno

$$arc\,tan\,z=\frac{1}{2\,i}\,l\left(\frac{1+z\,i}{1-z\,i}\right).$$

Da questa eguaglianza che sussiste per qualunque valore di z si deduce

$$arc\,tan\,z\pm arc\,tan\,y=\frac{1}{2\,i}\,l\left[\frac{1+\dfrac{z\pm y}{1\mp z\,y}\,i}{1-\dfrac{z\pm y}{1\mp z\,y}\,i}\right],$$

ovvero

(43) $$arc\,tan\,z\pm arc\,tan\,y=arc\,tan\,\frac{z\pm y}{1\mp z\,y}\,.$$ [1]

---

[1] È utile avvertire che la formola (43) si può dedurre facilmente dalla nota equazione

$$tan\,(a\pm b)=\frac{tan\,a\pm tan\,b}{1\mp tan\,a\,tan\,b}\,.$$

Infatti se poniamo $tan\,a=z$, $tan\,b=y$, avremo

$$arc\,tan\,z\pm arc\,tan\,y=arc\,tan\,\frac{z\pm y}{1\mp z\,y}\pm k\,\pi.$$

Quando si prende il segno superiore, bisogna distinguere due casi, cioè secondochè a e b, entrambi minori di un quadrante, hanno una somma

Se in questa equazione prendiamo il segno superiore e facciamo $y = \frac{1}{z}$, troveremo

$$arc\,tan\,z = \frac{\pi}{2} - arc\,tan\frac{1}{z},$$

ma $arc\,tan\frac{1}{z}$ è sviluppabile secondo la serie (42) per tutti i valori di z maggiori di 1, quindi ec.

217. Le formole precedenti possono servire per calcolare il valore di π con serie più o meno rapidamente convergenti. Così se nella formola (40) facciamo una volta $z = 1$, un'altra volta $z = \frac{1}{2}$, troveremo

$$\frac{\pi}{2} = 1 + \frac{1}{2}\frac{1}{3} + \frac{1.3}{2.4}\frac{1}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{1}{7} + \cdots,$$

$$\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{1}{3.2^3} + \frac{1.3}{2.4}\frac{1}{5.2^5} + \cdots$$

Una formola molto comoda per calcolare π si ottiene dalla (42) facendo $z = 1$; infatti si trova

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots;$$

ma questa serie converge assai lentamente. Per provarlo prendiamo il valore approssimato

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots + \frac{1}{4n-3} - \frac{1}{4n-1};$$

---

inferiore o superiore a $\frac{\pi}{2}$. Nel primo caso è evidente che bisogna fare $k = 0$; nel secondo, cioè quando si ha $zy > 1$, si deve avere $k = +1$, e si trova

$$arc\,tan\,z + arc\,tan\,y = \pi - arc\,tan\frac{z+y}{zy-1}.$$

indicando con R il resto, avremo

$$R = \frac{1}{4n+1} - \frac{1}{4n+3} + \cdots > \frac{1}{4n+1} - \frac{1}{4n+3},$$

ovvero

$$R > \frac{2}{(4n+1)(4n+3)}.$$

Se prendiamo i primi 200 termini della serie, cioè se facciamo $n = 100$, troveremo $R > 0,00001$; quindi per ottenere il valore di $\frac{\pi}{4}$ esatto sino alla quinta cifra decimale bisogna calcolare più di 200 termini della serie proposta; lo che prova che questa serie non è adattata per calcolare π con grande esattezza.

Dalla formola (42) si possono però dedurre innumerevoli serie di rapidissima convergenza, combinandola coll'equazione (43). Per darne un esempio osserviamo che dalla (43) si ha

$$\frac{\pi}{4} = arc\ tan \frac{1}{5} + arc\ tan \frac{2}{3},$$

$$arc\ tan \frac{1}{5} + arc\ tan\ y = arc\ tan \left[\frac{\frac{1}{5} + y}{1 - \frac{1}{5} y} \right].$$

Se poniamo

$$\frac{\frac{1}{5} + y}{1 - \frac{1}{5} y} = \frac{2}{3},\ \text{avremo}\ y = \frac{7}{17},\ \text{talchè}$$

$$\frac{\pi}{4} = 2\ arc\ tan \frac{1}{5} + arc\ tan \frac{7}{17};$$

fatto di nuovo

$$\frac{\frac{1}{5} + y}{1 - \frac{1}{5} y} = \frac{7}{17},\ \text{da cui}\ y = \frac{18}{92},\ \text{avremo}$$

$$\frac{\pi}{4} = 3\ arc\ tan \frac{1}{5} + arc\ tan \frac{18}{92}.$$

Se adesso nella formola

$$arc\ tan\frac{1}{5}-arc\ tan\ y=arc\ tan\left[\frac{\frac{1}{5}-y}{1+\frac{1}{5}y}\right],$$

determiniamo y mediante la relazione $\dfrac{\frac{1}{5}-y}{1+\frac{1}{5}y}=\dfrac{18}{92}$ troveremo

$y=\dfrac{1}{239}$, laonde

$$\frac{\pi}{4}=4\ arc\ tan\frac{1}{5}-arc\ tan\frac{1}{139},$$

ovvero

$$\frac{\pi}{4}=4\left[\frac{1}{5}-\frac{1}{3}\frac{1}{5^3}+\frac{1}{5}\frac{1}{5^5}-\frac{1}{7}\frac{1}{5^7}+\cdots\right]$$

$$-\left[\frac{1}{139}-\frac{1}{3}\frac{1}{139^3}+\frac{1}{5}\frac{1}{139^5}-\frac{1}{7}\frac{1}{139^7}+\cdots\right],$$

serie che è rapidamente convergente.

Funzioni ciclometriche di una variabile complessa.

218. Le funzioni ciclometriche $arc\ sen(\alpha+\beta i)$, $arc\ cos(\alpha+\beta i)$ sono definite dall' equazioni

$$arc\ sen\,(\alpha+\beta i)=\sum_0^\infty\frac{1\,.\,3\,.\,5\,.\,\ldots\,(2n-1)}{2\,.\,4\,.\,6\,.\,\ldots\,(2n)}(\alpha+\beta i)^{2n+1},$$

$$arc\ cos\,(\alpha+\beta i)=\frac{\pi}{2}-arc\ sen\,(\alpha+\beta i),$$

che sussistono per tutti i valori di $\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$ che non superano 1.

Per potere fare uso di queste formole è necessario porre

arc sen $(\alpha+\beta i)$ e *arc cos* $(\alpha+\beta i)$ sotto la forma di numeri complessi; cominciando dalla prima, facciamo

$$arc\,sen\,(\alpha+\beta i)=x+y i\,,$$

ove, per analogia colle funzioni ciclometriche di una variabile reale, intenderemo che *arc sen* $(\alpha+\beta i)$ indichi il più piccolo arco che ha $\alpha+\beta i$ per seno. Dall'ultima eguaglianza si deduce

$$\alpha+\beta i=sen\,(x+y i)=\frac{e^{y}+e^{-y}}{2}\,sen\,x+i\,\frac{e^{y}-e^{-y}}{2}\cos x\,,$$

da cui segue

$$\frac{\alpha}{sen\,x}=\frac{e^{y}+e^{-y}}{2}\,,\qquad \frac{\beta}{\cos x}=\frac{e^{y}-e^{-y}}{2}\cos x.$$

Ricavando da queste equazioni i valori di e^{y} e di e^{-y}, troveremo

$$e^{y}=\frac{\alpha}{sen\,x}+\frac{\beta}{\cos x}\,,\quad e^{-y}=\frac{\alpha}{sen\,x}-\frac{\beta}{\cos x}\,,$$

che moltiplicate insieme danno

$$1=\frac{\alpha^{2}}{sen^{2}\,x}-\frac{\beta^{2}}{\cos^{2}x}\,,$$

ovvero, sostituendo $1-\cos^{2}x$ per $sen^{2}\,x$ e ordinando l'equazione che ne risulta rispetto a $\cos^{2}x$,

$$\cos^{4}x+(\alpha^{2}+\beta^{2}-1)\cos^{2}x-\beta^{2}=0\,;$$

che risoluta rispetto a $\cos^{2}x$ da

$$\cos^{2}x=\frac{1}{2}\left[1-\alpha^{2}-\beta^{2}+\sqrt{(1-\alpha^{2}-\beta^{2})^{2}+4\beta^{2}}\right]\,,$$

ove abbiamo preso il segno + perchè $cos^2 x$ non può essere una quantità negativa. Il valore di $sen^2 x$ è dato dall' equazione

$$sen^2 x = \frac{1}{2}\left[1 + \alpha^2 + \beta^2 - \sqrt{(1+\alpha^2+\beta^2)^2 - 4\alpha^2}\right].$$

Talchè se per brevità facciamo

$$A = \left[\frac{1 + \alpha^2 + \beta^2 - \sqrt{(1+\alpha^2+\beta^2)^2 - 4\alpha^2}}{2}\right]^{\frac{1}{2}},$$

$$B = \left[\frac{1 - \alpha^2 - \beta^2 + \sqrt{(1-\alpha^2-\beta^2)^2 + 4\beta^2}}{2}\right]^{\frac{1}{2}},$$

avremo

$$sen\, x = \pm A, \quad cos\, x = \pm B,$$

da cui

$$x = \pm\, arc\, sen\, A,$$

poichè per $\alpha = \beta = 0$, deve aversi $x = 0$,

Per giudicare quale dei due segni bisogna prendere, facciamo $\beta = 0$, avremo

$$x = \pm\, arc\, sen \sqrt{\alpha^2};$$

se si ha $1 > \alpha > 0$ sappiamo che $x = arc\, sen\, \alpha$ ed è compreso fra 0 e $\frac{\pi}{2}$; quindi in questo caso si deve scegliere il segno superiore. Se $-1 < \alpha < 0$, allora x è compreso fra 0 e $-\frac{\pi}{2}$ e quindi va preso il segno inferiore. Fra i limiti $-\frac{\pi}{2}$ e $+\frac{\pi}{2}$ il coseno è sempre positivo, quindi bisogna prendere in ogni caso B positivamente.

Quindi per $\alpha > 0$ avremo

$$sen\, x = +A, \quad cos\, x = B, \quad x = arc\, sen\, (+A),$$

e per $\alpha < 0$,

$$sen\,x = -A\,,\quad cos\,x = B\,,\quad x = arc\,sen\,(-A).$$

Il valore di y è dato dalla formola

$$y = l\left(\frac{\alpha}{sen\,x} + \frac{\beta}{cos\,x}\right) = l\left(\pm\frac{\alpha}{A} + \frac{\beta}{B}\right).$$

Sostituendo questi valori, avremo

$$arc\,sen\,(\alpha + \beta i) = arc\,sen\,(\pm A) + i\,l\left(\pm\frac{\alpha}{A} + \frac{\beta}{B}\right),$$

ove si deve prendere il segno superiore o l'inferiore secondochè α è positivo o negativo.

Per la definizione di $arc\,cos\,(\alpha + \beta i)$ si ha

$$arc\,cos\,(\alpha + \beta i) = arc\,cos\,(\pm A) - i\,l\left(\pm\frac{\alpha}{A} + \frac{\beta}{B}\right);$$

ma

$$\pm\frac{\alpha}{A} + \frac{\beta}{B} = \frac{1}{\pm\frac{\alpha}{A} - \frac{\beta}{B}},$$

quindi avremo

$$arc\,cos\,(\alpha + \beta i) = arc\,cos\,(\pm A) + i\,l\left(\pm\frac{\alpha}{A} - \frac{\beta}{B}\right).$$

Osserviamo che ai valori di A e B si può dare un'altra forma, cioè

$$A = \frac{\alpha}{\left[\frac{1}{2}(1 + \alpha^2 + \beta^2) + \frac{1}{2}\sqrt{(1 + \alpha^2 + \beta^2)^2 - 4\alpha^2}\right]^{\frac{1}{2}}},$$

$$B = \frac{\beta}{\left[\frac{1}{2}\sqrt{(1 - \alpha^2 - \beta^2)^2 + 4\beta^2} - \frac{1}{2}(1 - \alpha^2 - \beta^2)\right]^{\frac{1}{2}}}.$$

Se facciamo

$$\alpha = \rho \cos\theta , \quad \beta = \rho \operatorname{sen}\theta ,$$

avremo

$$A = \frac{\rho\cos\theta}{\left[\frac{1}{2}(1+\rho^2)+\frac{1}{2}\sqrt{(1-2\rho^2\cos 2\theta+\rho^4}\right]^{\frac{1}{2}}},$$

$$B = \frac{\rho\operatorname{sen}\theta}{\left[\frac{1}{2}\sqrt{(1-2\rho^2\cos 2\theta+\rho^4}-\frac{1}{2}(1-\rho^2)\right]^{\frac{1}{2}}}.$$

Mediante questi valori la serie per $arc\,sen\,(\alpha+\beta i)$ si decompone in due serie reali, dalle quali poi se ne possono dedurre altre; ma è inutile insistere su questi particolari.

219. La funzione $arc\tan(\alpha+\beta i)$ è definita dall'equazione

$$arc\tan(\alpha+\beta i) = \sum_0^\infty (-1)^n \frac{(\alpha+\beta i)^{2n+1}}{2n+1}.$$

Per fare uso di questa formola è necessario dare ad $arc\tan(\alpha+\beta i)$ la forma ordinaria di un numero complesso; a tale uopo facciamo

$$arc\tan(\alpha+\beta i) = x + y i ,$$

da cui segue

$$\alpha+\beta i = \tan(x+yi) = \frac{2\operatorname{sen}2x + i(e^{2y}-e^{-2y})}{2\cos 2x + e^{2y} + e^{-2y}} ;$$

quindi avremo

$$\alpha = \frac{2\operatorname{sen}2x}{2\cos 2x + e^{2y} + e^{-2y}} , \quad \beta = \frac{e^{2y}-e^{-2y}}{2\cos 2x + e^{2y} + e^{-2y}} ,$$

e per conseguenza

$$e^{2y} = \frac{1+\beta}{\alpha}\operatorname{sen}2x - \cos 2x ,$$

$$e^{-2y} = \frac{1-\beta}{\alpha}\operatorname{sen}2x - \cos 2x.$$

Da queste due equazioni se ne deducono le altre

$$1 = \frac{1-\beta^2}{\alpha^2} sen^2 2x - \frac{2 \, sen \, 2x \cos 2x}{\alpha} + \cos^2 2x ,$$

$$e^{4y} = \frac{(1+\beta) sen \, 2x - \alpha \cos 2x}{(1-\beta) sen \, 2x - \alpha \cos 2x},$$

da cui segue

$$\tan 2x = \frac{2\alpha}{1-\alpha^2-\beta^2}, \quad x = \frac{1}{2} arc \tan \frac{2\alpha}{1-\alpha^2-\beta^2},$$

$$y = \frac{1}{4} l \left[\frac{(1+\beta)^2+\alpha^2}{(1-\beta)^2+\alpha^2}\right].$$

Laonde avremo

$$arc \tan(\alpha+\beta i) = \frac{1}{2} arc \tan \frac{2\alpha}{1-\alpha^2-\beta^2} + i \frac{1}{4} l \left[\frac{(1+\beta)^2+\alpha^2}{(1-\beta)^2+\alpha^2}\right]. \text{ [1]}$$

Se facciamo

$$\alpha = \rho \cos \theta , \quad \beta = \rho \, sen \, \theta ,$$

---

[1] Se osserviamo che per la formola

$$2 \, arc \tan x = arc \tan \frac{2x}{1-x^2},$$

si ha

$$arc \tan \frac{2\alpha}{1-\alpha^2-\beta^2} = 2 \, arc \tan \frac{2\alpha}{1-\alpha^2-\beta^2+A},$$

ove

$$A = \sqrt{(1+\alpha^2+\beta^2)^2 - 4\beta^2},$$

e che

$$\frac{(1+\beta)^2+\alpha^2}{(1-\beta)^2+\alpha^2} = \left[\frac{\alpha^2+(1+\beta)^2-A}{A-\alpha^2-(1-\beta)^2}\right]^2,$$

si vede che la formola che abbiamo dato per $arc \tan(\alpha+\beta i)$ si riduce a quella di Cauchy e di Schlömilch.

troveremo

$$arc\,tan\,(\rho\cos\theta + i\rho\,sen\,\theta)$$

$$= \frac{1}{2}\,arc\,tan\,\frac{2\rho\cos\theta}{1-\rho^2} + i\frac{1}{4}\,l\left[\frac{1+2\rho\,sen\,\theta+\rho^2}{1-2\rho\,sen\,\theta+\rho^2}\right];$$

per mezzo di questa formola la serie per $arc\,tan\,(\alpha + \beta i)$ si può decomporre in due serie reali.

Serie iperboliche.

220. *Le serie*

$$1 + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \cdots,$$

$$x + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} + \cdots,$$

sono convergenti in tutta l' estensione del piano.

Infatti il rapporto fra due termini consecutivi ha per limite zero in entrambe le serie.

Le somme di queste serie godono, come mostreremo. proprietà analoghe a quelle del coseno e seno circolare; per questa ragione e per considerazioni geometriche che non è qui luogo riferire, queste funzioni si distinguono rispettivamente col nome di *coseno* e *seno iperbolico*. Adottando la notazione proposta dal chiarissimo Professor Mossotti, faremo quindi

$$(44) \qquad \cosh x = \Sigma\,\frac{x^{2n}}{\Pi\,(2n)}, \quad senh\,x = \Sigma\,\frac{x^{2n+1}}{\Pi\,(2n+1)}.$$

221. *Quando* x *è una variabile reale, le condizioni neces-*

sarie e sufficienti alle quali debbono soddisfare le funzioni cosh x e senh x, *sono le seguenti*

$$(45)\quad \begin{cases} \cosh(x \pm y) = \cosh x \cosh y \pm \operatorname{senh} x \operatorname{senh} y\,, \\ \operatorname{senh}(x \pm y) = \operatorname{senh} x \cosh y \pm \cosh x \operatorname{senh} y\,, \\ \lim\limits_{m=\infty} \left[\dfrac{m \operatorname{senh} \dfrac{x}{m}}{\cosh \dfrac{x}{m}}\right] = x\,, \\ \lim\limits_{m=\infty} \left[\cosh \dfrac{x}{m}\right]^m = 1. \end{cases}$$

1°. Le prime due equazioni si dimostrano come nel n° 196. La terza è una conseguenza delle due formole

$$\lim_{m=\infty} \left[m \operatorname{senh} \frac{x}{m}\right] = x\,, \quad \lim_{m=\infty} \left[\cosh \frac{x}{m}\right] = 1\,,$$

che risultano in modo evidente dall'equazioni (44).

Per dimostrare la quarta, osserviamo che si ha

$$1 < \cosh \frac{x}{m} < \frac{1}{1 - \left(\dfrac{x}{m}\right)^2}\,,$$

da cui

$$1 < \left[\cosh \frac{x}{m}\right]^m < \frac{1}{\left(1 + \dfrac{x}{m}\right)^m \left(1 - \dfrac{x}{m}\right)^m}\,.$$

Ma si ha

$$\lim_{m=\infty} \left[\frac{1}{\left(1 + \dfrac{x}{m}\right)^m \left(1 - \dfrac{x}{m}\right)^m}\right] = \frac{1}{e^x \,.\, e^{-x}} = 1\,;$$

dunque ec.

2°. La reciproca, cioè che l'equazioni (44) sono conseguenze dell'equazioni (45), si dimostra in un modo interamente analogo a quello che abbiamo usato per le funzioni circolari (196).

222. Dalle formole (44) risulta manifestamente che $\cosh x$ e $\operatorname{senh} x$ sono funzioni continue di x, che crescono indefinitamente con x. Inoltre dalle medesime equazioni si deduce che

$$\cosh(-x) = \cosh x\,, \quad \operatorname{senh}(-x) = -\operatorname{senh} x\,,$$

$$\cosh 0 = 1\,, \qquad \operatorname{senh} 0 = 0\,,$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}\,, \quad \operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}\,.$$

Se nell'equazione

$$e^x = \cosh x + \operatorname{senh} x\,,$$

che è conseguenza delle due ultime, sostituiamo una volta mx invece di x, e un'altra volta innalziamo i due membri alla potenza m^{esima}, troveremo

$$(46) \qquad (\cosh x + \operatorname{senh} x)^m = \cosh m x + \operatorname{senh} m x.$$

Dalla formola

$$\cosh(x - y) = \cosh x \cosh y - \operatorname{senh} x \operatorname{senh} y\,,$$

facendo $x = y$, si deduce

$$1 = \cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x\,;$$

la quale mostra, 1°. che $\cosh x$ è sempre maggiore di 1, eccetto per $x = 0$; 2°. che si ha sempre $\cosh x > \operatorname{senh} x$.

223. La funzione $\cosh x$ non può essere annullata da nessun valore reale di x; ma è annullata da infiniti valori immaginari. Infatti è facile verificare che

$$\cosh(i x) = \cos x\,, \quad \cosh x = \cos(i x)\,;$$

quindi avremo

$$\cosh\left(\frac{2n+1}{2}\pi i\right) = 0\,, \quad \cosh(n\pi i) = (-1)^n.$$

Parimente poichè si ha

$$senh\,(i\,x) = i\,sen\,x\,, \quad senh\,x = \frac{1}{i}\,sen\,(i\,x)\,,$$

avremo

$$senh\left(\frac{2n+1}{2}\,\pi\,i\right) = (-1)^n\,i\,, \quad senh\,(n\,\pi\,i) = 0.$$

224. *Le funzioni* cosh x *e* senh x *sono periodiche ed hanno per periodo* $2\,\pi\,i$.

Dalle prime due formole (45), si deducono facilmente le seguenti

$$cosh\,(x \pm 2n\,\pi\,i) = cos\,h\,x\,,$$

$$senh\,(x \pm 2n\,\pi\,i) = sen\,h\,x\,,$$

$$cosh\left(x \pm \frac{\pi}{2}\,i\right) = \pm\,i\,senh\,x\,,$$

$$senh\left(x \pm \frac{\pi}{2}\,i\right) = \pm\,i\,cosh\,x\,,$$

$$cosh\,(x \pm \pi\,i) = -\,cosh\,x\,,$$

$$senh\,(x \pm \pi\,i) = -\,senh\,x\,,$$

$$cosh\left(x \pm \frac{3}{2}\,\pi\,i\right) = \mp\,i\,senh\,x\,,$$

$$senh\left(x \pm \frac{3}{2}\,\pi\,i\right) = \mp\,i\,cosh\,x\,,$$

$$cosh\left(x + \frac{2n+1}{2}\,\pi\,i\right) = (-1)^n\,i\,senh\,x\,,$$

$$senh\left(x + \frac{2n+1}{2}\,\pi\,i\right) = (-1)^n\,i\,cosh\,x\,,$$

$$cosh\,(x + n\,\pi\,i) = (-1)^n\,cosh\,x$$

$$= (-1)^n\,cosh\,x\,, \quad senh\,(x + n\,\pi\,i) = (-1)^n\,senh\,x.$$

Le prime due formole dimostrano il teorema. Dal valore di e^x che abbiamo trovato nel numero 222 risulta poi che anche e^x è una funzione periodica che ha per periodo $2\pi i$.

225. Combinando l'equazione (46) con quella che ne risulta mutando il segno di x, troveremo

$$cosh\,(m\,x) = \frac{(cosh\,x + senh\,x)^m + (cosh\,x - senh\,x)^m}{2},$$

$$senh\,(m\,x) = \frac{(cosh\,x + senh\,x)^m - (cosh\,x - senh\,x)^m}{2}.$$

Se sviluppiamo i secondi membri, otterremo

$$(47)\quad \left\{\begin{aligned} cosh\,(m\,x) &= \sum m_{2n}\, cosh^{m-2n} x\; senh^{2n} x\,, \\ senh\,(m\,x) &= \sum m_{2n+1}\, cosh^{m-2n-1} x\; senh^{2n+1} x\,, \end{aligned}\right.$$

e queste formole valgono per qualunque valore di x, perchè sempre $senh\,x$ è minore di $cosh\,x$.

Facendo successivamente $m = 2, 3, 4, \ldots$ si trova

$$cosh\,(2x) = cosh^2 x + senh^2 x\,,$$

$$cosh\,(3x) = cosh^3 x + 3\,cosh\,x\,senh^2 x\,,$$

$$cosh\,(4x) = cosh^4 x + 6\,cosh^2 x\,senh^2 x + senh^4 x\,,$$

. . . .

$$senh\,(2x) = 2\,cosh\,x\,senh\,x\,,$$

$$senh\,(3x) = 3\,cosh^2 x\,senh\,x + senh^3 x\,,$$

$$senh\,(4x) = 4\,cosh^3 x\,senh\,x + 4\,cosh\,x\,senh^3 x\,,$$

. . . .

Alla formola (47) si possono far subire le medesime trasfor-

mazioni che abbiamo adoperate per l'equazioni (15) e (16). Così troveremo

$$\cosh(mx)$$
$$=\sum \frac{m^2(m^2-2^2)(m^2-m^4)\ldots(m^2-(2n-2)^2)}{1.2.3\ldots(2n)}\,\operatorname{senh}^{2n}x\,,$$

$$\operatorname{senh}(m\,x)$$
$$=\cosh x\sum \frac{m(m^2-2^2)(m^2-4^2)\ldots(m^2-(2n)^2)}{1.2.3\ldots(2n+1)}\,\operatorname{senh}^{2n+1}x\,,$$

$$\cosh(m\,x)$$
$$=\cosh x\sum \frac{(m^2-1^2)(m^2-3^2)\ldots(m^2-(2n-1)^2)}{1.2.3\ldots(2n)}\,\operatorname{senh}^{2n}x\,,$$

$$\operatorname{senh}(m\,x)$$
$$=\sum \frac{m(m^2-1^2)(m^2-3^2)\ldots(m^2-(2n-1)^2)}{1.2.3\ldots(2n+1)}\,\operatorname{senh}^{2n+1}x.$$

Queste formole sussistono quando m è un numero qualunque per tutti i valori di x pei quali $\operatorname{senh} x < 1$. Se m è un numero intero, le prime due formole valgono per m pari, e le altre due per m dispari.

Da queste formole si deduce

$$\cosh(2x)=1+2\operatorname{senh}^2 x\,,$$
$$\cosh(3x)=\cosh x\,(1+4\operatorname{senh}^2 x)\,,$$
$$\cosh(4x)=1+8\operatorname{senh}^2 x+8\operatorname{senh}^4 x\,,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\operatorname{senh}(3x)=3\operatorname{senh} x+4\operatorname{senh}^3 x\,,$$
$$\operatorname{senh}(4x)=\cosh(4\operatorname{senh} x+8\operatorname{senh}^3 x)\,,$$
$$\operatorname{senh}(5x)=5\operatorname{senh} x+20\operatorname{senh}^3 x+16\operatorname{senh}^5 x.$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

226. Parimente, procedendo come nel n° 200, si troverà per m pari

$$2^m \cosh^m x = 2 \sum_{n=0}^{n=\frac{m-2}{2}} m_n \cosh(m-2n)x + m_{\frac{m}{2}} ,$$

$$2^m \operatorname{senh}^m x = 2 \sum_{n=0}^{n=\frac{m-2}{2}} (-1)^m m_n \cosh(m-2n)x + (-1)^{\frac{m}{2}} m_{\frac{m}{2}} ,$$

e per m dispari

$$2^{m-1} \cosh^m x = \sum_{n=0}^{n=\frac{m-1}{2}} m_n \cosh(m-2n)x ,$$

$$2^{m-1} \operatorname{senh}^m x = \sum_{n=0}^{n=\frac{m-1}{2}} (-1)^n m_n \operatorname{senh}(m-2n)x .$$

Da queste formole si trae

$$2 \cosh^2 x = \cosh(2x) + 1 ,$$

$$4 \cosh^3 x = \cosh(3x) + 3 \cosh x ,$$

$$8 \cosh^4 x = \cosh(4x) + 4 \cosh(2x) + 3 ,$$

$$\cdots\cdots\cdots ,$$

$$2 \operatorname{senh}^2 x = \cosh(2x) - 1 ,$$

$$4 \operatorname{senh}^3 x = \operatorname{senh}(3x) - 3 \operatorname{senh} x ,$$

$$8 \operatorname{senh}^4 x = \cosh(4x) - 4 \cosh(2x) + 3 ,$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

227. Se facciamo

$$\tanh x = \frac{\operatorname{senh} x}{\cosh x} , \quad \coth x = \frac{\cosh x}{\operatorname{senh} x} ,$$

$$\operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x} , \quad \operatorname{cosech} x = \frac{1}{\operatorname{senh} x} ,$$

avremo

$$tanh\,x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^x}\,,\qquad coth\;x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}\,,$$

$$sech\,x = \frac{2}{e^x + e^{-x}}\,,\qquad cosech\,x = \frac{2}{e^x - e^{-x}}\,,$$

$$tanh\,0 = 0\,,\qquad coth\;\;0 = \infty\,,$$

$$sech\,0 = 1\,,\qquad cosech\;0 = \infty\,,$$

$$tanh\left(\frac{\pi}{2}i\right) = \infty\,,\quad tanh\,(\pi i) = 0\,,$$

$$tanh\left(\frac{3}{2}\pi i\right) = -\infty\,,\quad tanh\,(2n\pi i) = 0.$$

Dalle formole trovate nel n° 223 si deduce

$$tanh\left(x \pm \frac{\pi}{2}\,i\right) = coth\,x\,,$$

$$tanh\;(x \pm \pi\;\;i) = tanh\,x\,,$$

$$tanh\left(x \pm \frac{3}{2}\pi\,i\right) = coth\,x\,,$$

$$tanh\;\;(x \pm 2n\pi i) = tanh\,x.$$

La seconda equazione mostra che *tanh* e *coth* sono funzioni periodiche ed hanno per periodo $\pi\,i$.

Inoltre si ha

$$tanh\,(x \pm y) = \frac{tanh\,x \pm tanh\,y}{1 \pm tanh\;x\;tanh\;x}\,,$$

da cui

$$tanh\,x = \frac{2\;tanh\,\frac{x}{2}}{1 + tanh^2\,\frac{x}{2}}.$$

Dall'equazioni $senh^2 \frac{x}{2} = \frac{cosh\ x - 1}{2}$, $cosh^2 \frac{x}{2} = \frac{cosh\ x + 1}{2}$, segue

$$tanh \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{cosh\ x - 1}{cosh\ x + 1}} = \frac{senh\ x}{cosh\ x + 1} = \frac{cosh\ x - 1}{senh\ x}$$

$$= coth\ x - cosec\ h\ x\ ,$$

e anche

$$coth \frac{x}{2} = coth\ x + cosech\ x\ ,$$

da cui

$$coth \frac{x}{2} + tanh \frac{x}{2} = 2\ coth\ x\ ,$$

$$coth \frac{x}{2} - tanh \frac{x}{2} = 2\ cosech\ x.$$

Le formole (47) danno

$$tanh\,(m\,x) = \frac{\sum m_{2n+1}\ tanh^{2n+1}\ x}{\sum m_{2n}\ tanh^{2n}\ x}\ ,$$

da cui si trae

$$tanh\,(2x) = \frac{2\ tanh\ x}{1 + tanh^2\ x}\ ,$$

$$tanh\,(3x) = \frac{3\ tanh\ x + tanh^3\ x}{1 + 3\ tanh^2\ x}\ ,$$

$$tanh\,(4x) = \frac{4\ tanh\ x + 4\ tanh^3\ x}{1 + 6\ tanh^2\ x + tanh^4\ x}\ ,$$

. . . .

Serie per le funzioni iperboliche inverse.

228. *Per tutti i valori di* z^2 *che soddisfano alla relazione* $z^2 \leq 1$, *si ha*

$$arcsenh\ z = \frac{z}{1} - \frac{1}{2}\frac{z^3}{3} + \frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\frac{z^5}{5} - \frac{1\,.\,3\,.\,5}{2\,.\,4\,.\,6}\frac{z^7}{7} + \ldots.$$

$$= \sum (-1)^n \frac{1\,.\,3\,.\,5\,\ldots.\,(2n-1)}{2\,.\,4\,.\,6\,\ldots.\,(2n)} \frac{z^{2n+1}}{2n+1}\ .$$

La convergenza della serie proposta per l'ipotesi fatta è stata già dimostrata nel n° 210; per provare che essa ha per somma *arcsenh* z, osserviamo che la serie

$$\frac{z}{1}+\frac{m^2-1^2}{1.2}\frac{z^3}{3}+\frac{(m^2-1^2)(m^2-m^2-3^2)}{1.2.3.4}\frac{z^5}{5}+\dots$$

$$=\Sigma\frac{(m^2-1^2)(m^2-3^2)\dots(m^2-(2n-1)^2)}{1.2.3\dots(2n)}\frac{z^{2n+1}}{2n+1},$$

ove $z = senh\, x$, è altresì convergente per tutti i valori di $z^2 \leq 1$, ed ha per somma $\frac{senh\,(m\,x)}{m}$. Tutti i termini della prima serie sono limiti per $m = 0$ dei termini corrispondenti della seconda, quindi la prima serie ha per somma $lim\,\frac{senh\,(m\,x)}{m} = x$; dunque ec.

229. Il metodo precedente non è più applicabile per esprimere l'arco in funzione del coseno iperbolico, perchè questo coseno è sempre maggiore di 1; ma si può procedere nel seguente modo.

Dalla formola

$$senh\,\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{cosh\,x-1}{2}},$$

si deduce

$$x = 2\,arcsenh\left[\sqrt{\frac{cosh\,x-1}{2}}\right];$$

se quindi facciamo $cosh\, x = z$, avremo

$$arccosh\,z = \sqrt{2(z-1)}\left[1-\frac{1}{2}\frac{\left(\frac{z-1}{2}\right)}{3}+\frac{1.3}{2.4}\frac{\left(\frac{z-1}{2}\right)^2}{5}\right.$$

$$\left.-\frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{\left(\frac{z-1}{2}\right)^3}{7}-\dots\right],$$

e questa formola sussiste per tutti i valori di $z^2 \leq 3$.

230. *Per tutti i valori di* $z < 1$ *si ha*

$$arctanh\,z = \frac{z}{1}+\frac{z^3}{3}+\frac{z^5}{5}+\dots$$

La serie proposta è convergente per tutti i valori di $z < 1$, poichè il limite del rapporto di due termini consecutivi è uguale a z^2. Per dimostrare che ha per somma *arctanh z*, osserviamo che la serie

$$\frac{z}{1}+\frac{(m-1)(m-2)}{1.2}\frac{z^3}{3}+\frac{(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{1.2.3.4}\frac{z^5}{5}+\cdots,$$

è altresì convergente per $z = tanh\, x$, ed ha per somma $\frac{senh\,(m\,x)}{m\,cosh^m\,x}$. Ma i termini della prima serie sono limiti dei termini corrispondenti della seconda per $m=0$; quindi la prima serie ha per somma $lim\left[\frac{senh\,(m\,x)}{m\,cosh^m\,(m\,x)}\right]=x$; talchè avremo

$$arctanh\, z=\frac{z}{1}+\frac{z^3}{3}+\frac{z^5}{5}+\cdots.$$

231. Poichè le funzioni $senh\,x$, $cosh\,x$, $tanh\,x$, hanno relazione coll'esponenziale e^x, le funzioni inverse avranno relazione coi logaritmi neperiani. Infatti dalle formole

$$e^x = cosh\,x + senh\,x\,,\quad e^{-x} = cosh\,x - senh\,x\,,$$

si ha

$$x = l(cosh\,x + senh\,x)\,,\quad -x = l(cosh\,x - senh\,x)\,;$$

quindi avremo

$$arcsenh\, z = l(\sqrt{1+z^2}+z) = -l(\sqrt{1+z^2}-z)\,,$$

$$arccosh\, z = l(z+\sqrt{z^2-1}) = -l(z-\sqrt{z^2-1})\,,$$

$$arctanh\, z = \frac{1}{2}\,l\left(\frac{1+z}{1-z}\right).\text{ [1]}$$

[1] Gudermann, *Theorie der Potenzial-oder cyklisch-hyperbolischen functionen.* Vol. 6° del *Giornale di Crelle.* Siamo lieti di poter annunziare la prossima pubblicazione delle *Tavole dei logaritmi delle funzioni circolari ed iperboliche* calcolate dal Prof. Angelo Forti sotto la direzione del Prof. Mossotti.

CAPITOLO X.

Ulteriori ricerche sulle serie.

I criterii di convergenza che abbiamo dati nel Capitolo 5°, sono sufficienti per molti casi e bastevoli per un primo studio dell'Algebra. Ma taluni fra questi criterii possono riuscire inapplicabili; così se il rapporto fra due termini consecutivi di una serie ha per limite 1, non si può affermare se la serie proposta è convergente o divergente; lo stesso accade pel secondo, terzo e quarto criterio se

$$lim\left[n-(n+1)\frac{u_{n+1}}{u_n}\right]=1\,,\quad lim\, n\,\alpha=1 \text{ e } lim\sqrt[n]{u_n}=1.$$

Giova quindi mostrare come si debba procedere quando si verifichino questi casi particolari. Nel presente Capitolo esporremo varii teoremi generali relativi a quest'oggetto, ed altre teorie il cui insieme costituirà come un complemento delle dottrine contenute nei Capitoli precedenti.

Teoremi generali sulla convergenza delle serie.

Cominciamo dal premettere due lemmi fondamentali.

232. *Se* n *è un numero che può crescere indefinitamente, e se* r *e* μ *sono due numeri positivi, il primo dei quali è altresì intero, si ha*

$$(1)\qquad lim\left[\left(1-\left(\frac{l^r\, n}{l^r\,(n+1)}\right)^{\mu}\right)n\, l\, n\, l^2\, n\ldots . l^r\, n\right]=\mu.$$

ove $l^2\, n = l\, l\, n$, $l^3\, n = l\, l\, l\, n$, *ec.*

Se facciamo

$$\frac{l\left(1+\frac{1}{n}\right)}{l n}=\varepsilon_1\,,\quad \frac{l(1+\varepsilon_1)}{l^2 n}=\varepsilon_2\,,\quad \frac{l(1+\varepsilon_2)}{l^3 n}=\varepsilon_3\,,$$

$$\ldots\ldots\ldots,\quad \frac{l(1+\varepsilon)_{r-1}}{l^r n}=\varepsilon_r\,,$$

$\varepsilon_1,\ \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_r$ saranno quantità che convergeranno a zero al crescere di n.

Da queste formole si deducono le seguenti

$$n\,l n=\frac{1}{\varepsilon_1}\,l\left(1+\frac{1}{n}\right)^n,$$

$$n\,l n\,l^2 n=\frac{1}{\varepsilon_2}\,l\left(1+\frac{1}{n}\right)^n l(1+\varepsilon_1)^{\frac{1}{\varepsilon_1}},$$

$$n\,l n\,l^2 n\,l^3 n=\frac{1}{\varepsilon_3}\,l\left(1+\frac{1}{n}\right)^n l(1+\varepsilon_1)^{\frac{1}{\varepsilon_1}}\,l(1+\varepsilon_2)^{\frac{1}{\varepsilon_2}},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$n\,l n\,l^2 n\ldots.l^r n=\frac{1}{\varepsilon_r}\,l\left(1+\frac{1}{n}\right)^n l(1+\varepsilon_1)^{\frac{1}{\varepsilon_1}}\ldots.l(1+\varepsilon_{r-1})^{\frac{1}{\varepsilon_{r-1}}}.$$

Ciò posto, avremo

$$l\,(n+1)=(1+\varepsilon_1)\,l n$$
$$l^2(n+1)=l\,[l\,(n+1)]=l^2 n+l\,(1+\varepsilon_1)=(1+\varepsilon_2)\,l^2 n\,,$$
$$l^3(n+1)=l\,[l^2(n+1)]=l^3 n+l\,(1+\varepsilon_2)=(1+\varepsilon_3)\,l^3 n\,,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$l^r(n+1)=l[l^{r-1}(n+1)]=(1+\varepsilon_r)\,l^r n.$$

In virtù delle formole precedenti l' espressione data diventa

$$\left[1-\frac{1}{(1+\varepsilon_r)^\mu}\right] n\, l n\, l^2 n \ldots . l^r n$$

$$=\frac{1}{(1+\varepsilon_r)^\mu}\frac{(1+\varepsilon_r)^\mu-1}{\varepsilon_r}\, l\left(1+\frac{1}{n}\right)^n l(1+\varepsilon_1)^{\frac{1}{\varepsilon_1}} l(1+\varepsilon_2)^{\frac{1}{\varepsilon_2}} \ldots . l(1+\varepsilon_{r-1})^{\frac{1}{\varepsilon_{r-1}}}.$$

Questa relazione dimostra il teorema se si osserva che tutti i fattori contenuti nel secondo membro hanno per limite 1, eccetto il fattore $\frac{(1+\varepsilon_r)^\mu-1}{\varepsilon_r}$ che ha μ per limite (119).

Poichè l' espressione

$$l\frac{l^{r-1}(n+1)}{l^{r-1} n}=\varepsilon_r l^r n,$$

ne segue che

$$\lim\left[n\, l n\, l^2 n \ldots . l^{r-1} n\, l\frac{l^{r-1}(n+1)}{l^{r-1} n}\right]=1.$$

233. *Se* n *è un numero che può crescere indefinitamente, e se* r *e* μ *sono due numeri positivi, il primo dei quali è altresì intero, si ha*

$$\lim\left\{\left[\left(1+\frac{l^r(n+1)-l^r n}{l^r n}\right)^\mu-1\right]\frac{l^r n}{l^r(n+1)-l^r n}\right\}=\mu.$$

Questo lemma è una conseguenza evidente delle formole trovate nel n° precedente. Infatti la formola data può scriversi

$$\lim\frac{(1+\varepsilon_r)^\mu-1}{\varepsilon_r}=\mu,$$

lo che è esatto.

Ciò posto, si hanno i seguenti teoremi, che si riferiscono a serie che hanno *tutti* i termini positivi.

234 *La serie che ha per termine generale* u_n *è convergente o divergente secondochè la prima dell' espressioni*

$$q_0 = lim \left[1 - \frac{u_{n+1}}{u_n}\right],$$

$$q_1 = lim \left[n - (n+1)\frac{u_{n+1}}{u_n}\right],$$

$$q_2 = lim \left[n\, l\, n - \frac{u_{n+1}}{u_n}(n+1)\, l\,(n+1)\right],$$

$$q_3 = lim \left[n\, l\, n\, l^2\, n - \frac{u_{n+1}}{u_n}(n+1)\, l\,(n+1)\, l^2\,(n+1)\right],$$

. . . .

che non è uguale a zero è positiva o negativa.

Nel Capitolo 5° abbiamo dimostrato il teorema per q_0 e q_1; resta quindi a provarlo in generale.

Sieno

$$q_0 = 0, \quad q_1 = 0, \quad q_2 = 0, \; \ldots . \; q_r = 0,$$

q_{r+1} diverse da zero. Supponiamo in prima che si abbia $q_{r+1} > \mu > 0$. Poichè pel primo lemma si ha

$$lim \left\{\left[1 - \left(\frac{l^r\, n}{l^r\,(n+1)}\right)^{\mu}\right] n\, l\, n\, l^2\, n \ldots . \, l^r\, n\right\} = \mu,$$

ne segue che a cominciare da un valore di n abbastanza grande si deve avere

$$\left[1 - \left(\frac{l^r\, n}{l^r\,(n+1)}\right)^{\mu}\right] n\, l\, n\, l^2\, n \ldots . \, l^r\, n$$

$$< n\, l\, n\, l^2\, n \ldots . \, l^r\, n - \frac{u_{n+1}}{u_n}(n+1)\, l\,(n+1)\, l^2\,(n+1) \ldots . \, l^r\,(n+1).$$

Da questa formola si deduce

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < \frac{n}{n+1} \cdot \frac{l\, n}{l\,(n+1)} \cdot \frac{l^2\, n}{l^2\,(n+1)} \cdots \frac{l^{r-1}\, n}{l^{r-1}\,(n+1)} \left(\frac{l^r\, n}{l^r\,(n+1)}\right)^{1+\mu}.$$

Ma il secondo membro di questa eguaglianza è uguale al rapporto di due termini consecutivi della serie (92)

$$S = 1 + \sum_{n=2}^{n=\infty} \frac{1}{n\, l\, n\, l^2\, n \ldots l^{r-1}\, n\, (l^r\, n)^{1+\mu}},$$

che è convergente poichè $\mu > 0$; dunque la serie proposta è convergente.

Se si ha $q_{r+1} < \mu < 0$, vedremo facilmente che a cominciare da un certo valore di n, il rapporto di due termini consecutivi della serie proposta è maggiore del rapporto corrispondente di due termini consecutivi della serie S. Ma quest'ultima serie è divergente poichè $\mu < 0$, dunque la serie proposta è divergente.

Per applicare questo teorema giova osservare che indicando con r_0, r_1, r_2, r_3, ec. le quantità che hanno per limiti rispettivi q_0, q_1, q_2, q_3, ec., si ha

$$q_0 = \lim r_0,$$

$$q_1 = \lim r_1 = \lim\,[r_0(n+1) - 1] = \lim\,[r_0(n+1)] - 1,$$

$$q_2 = \lim r_2 = \lim \left[l(n+1)\, r_1 - n\, l \frac{(n+1)}{n} \right]$$

$$= \lim\,[r_1\, l(n+1)] - 1,$$

$$q_3 = \lim r_3 = \lim \left[r_2\, l^2(n+1) - n\, l\, n\, l \frac{l(n+1)}{l\, n} \right]$$

$$= \lim\,[r_2\, l^2(n+1)] - 1,$$

. . . .

Esempio. Consideriamo la serie che ha per termine generale

$$u_n = \frac{(n-1+a)(n-2+a)\ldots(1+a)\,a\,(1-a)\ldots(n-a)}{1^2 \cdot 2^2 \ldots n^2},$$

ove a è compresa fra 0 e 1; avremo

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+a)(n+1-a)}{(n+1)^2};$$

da cui

$$r_0 = \frac{n + a^2 - a + 1}{(n+1)^2}, \quad r_1 = \frac{a^2 - a}{n+1},$$

e per conseguenza $q_0 = 0$, $q_1 = 0$, e

$$q_2 = (a^2 - a) \lim \frac{l(n+1)}{n+1} - 1 = -1;$$

dunque la serie proposta è divergente.

235. *Se facciamo*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{1+\alpha_0}, \qquad p_0 = \lim (n\alpha_0 - 1),$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)(1+\alpha_1)}, \qquad p_1 = \lim \left[\frac{l\,n}{l(n+1) - l\,n}\alpha_1 - 1\right],$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)\frac{l(n+1)}{l\,n}(1+\alpha_2)}, \quad p_2 = \lim \left[\frac{l^2 n}{l^2(n+1) - l^2 n}\alpha_2 - 1\right],$$

. . . . ,

ove α_0, α_1, α_2, ec. *sono numeri positivi che tendono a zero al crescere di* n; *e se supponiamo che si abbia*

$$p_0 = 0, \quad \alpha_0 > \frac{1}{n},$$

$$p_1 = 0, \quad \alpha_1 > \frac{l(n+1) - l\,n}{l\,n},$$

$$p_2 = 0, \quad \alpha_2 > \frac{l^2(n+1) - l^2 n}{l^2 n},$$

. . . . ,

$$p_{r-1} = 0, \quad \alpha_{r-1} > \frac{l^{r-1}(n+1) - l^{r-1} n}{l^{r-1} n};$$

la serie che ha per termine generale u_n *è convergente se* p_r *è una*

quantità positiva; ed è divergente se p_r *è una quantità negativa o se essendo eguale a zero, si ha contemporaneamente*

$$\alpha_r < \frac{l^r(n+1) - l^r n}{l^r n}.$$

Sia

$$p_r = lim\left[\frac{l^r n}{l^r(n+1) - l^r n}\alpha_r - 1\right] > 0\ ,$$

e indichiamo con μ una quantità positiva minore di p_r.

Ciò posto, l'espressione

$$\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)\frac{l(n+1)}{ln}\frac{l^2(n+1)}{l^2 n}\cdots\frac{l^{r-1}(n+1)}{l^{r-1}n}\left(\frac{l^r(n+1)}{l^r n}\right)^{1+\mu}},$$

è il rapporto fra due termini consecutivi della serie convergente S (234), e

$$\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)\frac{l(n+1)}{ln}\frac{l^2(n+1)}{l^2 n}\cdots\frac{l^{r-1}(n+1)}{l^{r-1}}(1+\alpha_r)},$$

è il rapporto fra due termini consecutivi della serie proposta; ed è facile verificare che questo secondo rapporto è minore del primo.

Infatti pel secondo Lemma si ha

$$lim\left\{\left[\left(\frac{l^r(n+1)}{l^r n}\right)^{1+\mu} - 1\right]\frac{l^r n}{l^r(n+1) - l^r n}\right\} < lim\left[\frac{l^r n}{l^r(n+1) - l^r n}\alpha_r\right];$$

quindi a cominciare da un certo valore di n deve aversi

$$\left(\frac{l^r(n+1)}{l^r n}\right)^{1+\mu} < 1 + \alpha_r.$$

Laonde a cominciare da un dato valore di n, il quoziente di due termini consecutivi della serie proposta è minore del rap-

porto corrispondente di due termini consecutivi della serie convergente S, e per conseguenza la serie data è convergente.

Se $p_r < 0$, allora a cominciare da un certo valore di n si avrà

$$\alpha_r < \frac{l^r(n+1) - l^r n}{l^r n},$$

ovvero

$$1 + \alpha_r < \frac{l^r(n+1)}{l^r n},$$

talchè

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} > \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)\frac{l(n+1)}{l\,n}\frac{l^2(n+1)}{l^2 n}\cdots\frac{l^r(n+1)}{l^r n}}.$$

Dunque il rapporto di due termini consecutivi della serie proposta è maggiore del rapporto corrispondente di due termini consecutivi della serie divergente che risulta dalla serie S facendovi $\mu = 0$, e per conseguenza la serie data è divergente.

Al modo stesso si proverebbe che se

$$p_r = 0 \quad \text{e} \quad \alpha_r < \frac{l^r(n+1) - l^r n}{l^r n},$$

la serie è divergente.

Esempio. La serie

$$\frac{1}{2.2l2} + \frac{1.4}{2.5.3l3} + \frac{1.4.9}{2.5.10.4l4} + \frac{1.4.9.16}{2.5.10.17.5l5} + \cdots,$$

è divergente. Infatti abbiamo

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\frac{l(n+1)}{l\,n}},$$

e quindi, ponendo

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{1+\alpha_0},$$

si ottiene

$$\alpha_0 = \frac{1}{n} + \left(1 + \frac{1}{n}\right)\left[\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)\frac{l(n+1)}{l\,n} - 1\right] > \frac{1}{n},$$

$$p_0 = \lim n\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left[\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)\frac{l(n+1)}{l\,n} - 1\right]$$

$$= \lim\left(1 + \frac{1}{n}\right)\frac{l\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n + \frac{l(n+1)}{n}}{l\,n} = 0.$$

Parimente facendo

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)(1 + \alpha_1)},$$

avremo

$$\alpha_1 = \frac{1}{n^2} + \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)\left(\frac{l(n+1) - l\,n}{l\,n}\right) > \frac{l(n+1) - l\,n}{l\,n},$$

$$p_1 = \lim\left(\frac{1}{n^2} + \frac{l\,n}{(l(n+1) - l\,n)\,n^2}\right) = \frac{1}{e}\lim\frac{l\,n}{n} = 0.$$

Finalmente se si pone

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)\frac{l(n+1)}{l\,n}(1 + \alpha_2)},$$

si ha

$$\alpha_2 = \frac{1}{n^2},$$

e quindi

$$p_2 = \lim\left[\frac{l^2 n}{l^2(n+1) - l^2 n}\frac{1}{n^2} - 1\right]$$

$$= \lim\left[\frac{l^2 n}{\sqrt{n}} \cdot \frac{l\,n}{\sqrt{n}} - 1\right] = -1,$$

avendo riguardo al primo lemma.

236. *Se poniamo*

$$k_0 = \frac{l\frac{1}{u_n}}{n},$$

$$k_1 = \frac{l\frac{1}{n\,u_n}}{l\,n},$$

$$k_2 = \frac{l\frac{1}{n\,u_n\,l\,n}}{l^2\,n},$$

$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ ,$$

$$k_r = \frac{l\frac{1}{n\,u_n\,l\,n\,l^2\,n\ldots\ldots l^{r-1}\,n}}{l^r\,n},$$

la serie che ha per termine generale u_n *è convergente o divergente secondochè la prima delle quantità* k *che non è uguale a zero, converge al crescere di* n *verso un limite maggiore o minore di zero.*

Per k_0 il teorema è stato già dimostrato nel Capitolo 5° (121); se $k_0 = 0$ e k_1 è una quantità diversa da zero, formiamo la serie

$$V = u_1 + v\,u_v + v^2\,u_{v^2} + v^3\,u_{v^3} + \cdots,$$

che sappiamo (91) essere convergente o divergente insieme alla serie

$$U = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \cdots,$$

e calcoliamo il valore di k_0 rispetto alla serie V che sarà

$$\frac{l\frac{1}{v^m\,u_{v^m}}}{m},$$

ovvero ponendo $v^m = n$,

$$\frac{l\frac{1}{n\,u_n}}{l\,n}\,l\,v.$$

Ora questa espressione ha evidentemente lo stesso limite di k_1; quindi la serie U è convergente o divergente secondochè k_1 ha per limite una quantità maggiore o minore di zero. Se $k_1 = 0$, allora formeremo il valore di k_1 rispetto alla serie V, che è

$$\frac{l\frac{1}{m\;v^m\;u_{v^m}}}{l\,m},$$

ovvero ponendo $v^m = n$,

$$\frac{l\frac{l\,v}{n\,u_n\;l\,n}}{l^2\,n - l^2\,v} = \frac{l\frac{1}{n\,u_n\;l\,n}}{l^2\,n}\cdot\frac{1}{1-\frac{l^2\,v}{l^2\,n}} + \frac{l^2\,v}{l^2\,n - l^2\,v},$$

la quale quantità ha lo stesso limite di k_2.

Laonde per provare il teorema in generale, basta dimostrare che se è vero sino a k_{r-1} sarà pur vero per k_r. Supponiamo dunque che k_r sia la prima delle quantità k che non è uguale a zero; allora il valore

$$k_{r-1} = \frac{l\frac{1}{n\,u_n\,l\,n\,l^2\,n\ldots.\,l^{r-2}\,n}}{l^{r-1}\,n},$$

rispetto alla serie V sarà

$$\frac{l\frac{1}{m\,v^m\,u_{v^m}\,l\,m\,l^2\,m\ldots.\,l^{r-2}\,m}}{l^{r-1}\,m},$$

ovvero ponendo $v^m = n$,

$$(a)\qquad \frac{l\frac{1}{n\,u_n\frac{l\,n}{l\,v}\;l\left(\frac{l\,n}{l\,v}\right)\,l^2\left(\frac{l\,n}{l\,v}\right)\ldots.\,l^{r-2}\left(\frac{l\,n}{l\,v}\right)}}{l^{r-1}\left(\frac{l\,n}{l\,v}\right)}.$$

Ora se facciamo

$$1 - \frac{l^2 v}{l^2 n} = \theta_2 , \quad 1 + \frac{l\,\theta_2}{l^3 n} = \theta_3 , \ldots . 1 + \frac{l\,\theta_{r-1}}{l^r n} = \theta_r ,$$

le θ saranno quantità che convergono verso l' unità al crescere di n, ed avremo

$$l\left(\frac{l n}{l v}\right) = \theta_2\, l^2 n , \quad l^2\left(\frac{l n}{l v}\right) = \theta_3\, l^3 n , \ldots . l^{r-1}\left(\frac{l n}{l v}\right) = \theta_r\, l^r n ;$$

quindi la quantità (a) acquisterà la forma

$$\frac{l\,\dfrac{1}{n u_n\, l n\, l^2 n \ldots . l^{r-1} n}}{\theta_r\, l^r n} + \frac{l^r v - l(\theta_2\,\theta_3 \ldots . \theta_{r-1})}{\theta_r\, l^r n} .$$

Ma questa espressione ha evidentemente lo stesso limite di k_r; dunque la serie U è convergente o divergente secondochè k_r è una quantità positiva o negativa.(¹)

Esempio. La serie

$$\frac{1}{2(l2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{3(l3)^{\frac{4}{3}}} + \frac{1}{4(l4)^{\frac{5}{4}}} + \cdots ,$$

è divergente. Infatti si ha

$$\frac{1}{u_n} = n\,(l n)^{\frac{n+1}{n}} ,$$

e quindi

$$k_0 = \frac{l n}{n} + \left(1 + \frac{1}{n}\right)\frac{l^2 n}{n} , \quad \lim k_0 = 0 ,$$

(¹) Per altri particolari su questo argomento vedi il Volume 42 del *Giornale di Crelle*, i Volumi 7° e 8° del *Giornale di Liouville* e *Catalan, Traité élémentaire des Séries*.

poichè (68, 69)

$$\lim \frac{l\,n}{n} = 0 \,, \quad \lim \frac{l^2 n}{n} = \lim l(l\,n)^{\frac{1}{n}} = 0.$$

Parimente

$$\lim k_1 = \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right) \frac{l^2 n}{l\,n} = 0 \,,$$

$$\lim k_2 = \lim \frac{1}{n} = 0 \,,$$

$$\lim k_3 = \lim \left[\frac{1}{l^3 n} \cdot \frac{l^2 n}{n} - 1\right] = -1 \,.$$

Serie nelle quali il rapporto fra due termini consecutivi è sviluppabile in una serie che procede secondo le potenze discendenti dell'indice.

237. Sia data la serie

$$U = u_0 + u_1 x + u_2 x^2 + u_3 x^3 + \cdots \,,$$

ove

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 + \frac{a_1}{n} + \frac{a_2}{n^2} + \frac{a_3}{n^3} + \cdots = \rho_{n+1}\, e^{i\theta_{n+1}} \,,$$

$$x = r\,e^{i\varphi} \,, \quad u_n = \varpi_n\, e^{i\omega_n} \,,$$

$$a_1 = g + h\,i \,, \quad a_2 = g' + h' i \ldots \,,$$

$$\rho_{n+1} = \sqrt{\left(1 + \frac{g}{n} + \frac{g'}{n^2} + \cdots\right)^2 + \left(\frac{h}{n} + \frac{h'}{n^2} + \cdots\right)^2} = 1 + \frac{g}{n} + \frac{g_1}{n^2} + \cdots \,,$$

$$\theta_{n+1} = \operatorname{arc\,tan} \frac{\dfrac{h}{n} + \dfrac{h'}{n^2} + \cdots}{1 + \dfrac{g}{n} + \dfrac{g'}{n^2} + \cdots} = \frac{h}{n} + \frac{h_1}{n^2} + \cdots \,,$$

$$\varpi_n = \rho_0 \rho_1 \cdots \rho_n \,, \quad \omega_n = \theta_0 + \theta_1 + \theta_2 + \cdots \theta_n .$$

Ciò posto, si ha il seguente teorema:

Il cerchio di convergenza relativo alla serie U, *ha per raggio* 1. *Sulla circonferenza di questo cerchio la serie* U *è convergente indipendentemente dall'ordine dei termini se si ha* $g < -1$; *è semplicemente convergente, se si ha* $0 > g \geq -1$ *e* φ *differente da zero; è indeterminata o divergente in tutti gli altri casi.* [1]

1°. Poichè si ha

$$lim \left(\frac{\varpi_{n+1} r^{n+1}}{\varpi_n r^n} \right) = lim (\rho_{n+1} r) = r ,$$

è chiaro che 1 è il raggio del cerchio di convergenza; cioè che la serie U è convergente indipendentemente dall'ordine dei termini per tutti i punti compresi nella circonferenza di questo cerchio, e divergente per tutti i punti esterni.

2°. Dalla formola

$$\frac{\varpi_{n+1}}{\varpi_n} = \rho_{n+1} = 1 + \frac{g}{n} + \frac{g_1}{n^2} + \cdots ,$$

si deduce per $n = \infty$

$$lim \left[n - (n+1) \frac{\varpi_{n+1}}{\varpi_n} \right] = -1 - g.$$

Dunque la serie dei moduli

$$\varpi_0 + \varpi_1 + \varpi_2 + \cdots ,$$

è divergente per $g > -1$, convergente per $g < -1$; se $g = -1$ il criterio precedente non è più applicabile; ma in questo caso è facile mostrare che la serie dei moduli è divergente. Infatti è chiaro che potremo sempre prendere n così grande che si abbia

$$\rho_{n+1} > 1 - \frac{1}{n - \alpha + 1} ,$$

---

[1] Weierstrass, *Über die anal. facultaten. Giornale di Crelle,* Vol. 51, pag. 22 e seg.

ovvero

$$1-\frac{1}{n}+\frac{g_1}{n^2}+\cdots>1-\frac{1}{n}+\frac{1-\alpha}{n^2}-\cdots,$$

determinando α mediante la relazione $\alpha>1-g_1$; in questa ipotesi si ha

$$\varpi_0+\varpi_1+\varpi_2+\cdots+\varpi_n+\varpi_{n+1}+\cdots$$
$$=\varpi_0+\varpi_1+\cdots+\varpi_n(1+\rho_{n+1}+\rho_{n+1}\rho_{n+2}+\cdots)$$
$$>\varpi_0+\varpi_1+\cdots+\varpi_n(n-\alpha)\left(\frac{1}{n-\alpha}+\frac{1}{n-\alpha+1}+\frac{1}{n-\alpha+2}+\cdots\right);$$

ma la serie fra parentesi è divergente, dunque ec.

Laonde sulla circonferenza del cerchio di convergenza la serie U è convergente indipendentemente dall'ordine dei termini per i soli valori di $g<-1$.

3°. Per $g\geq 0$ la serie U non è convergente su tutta la circonferenza limite.

Se $g>0$ il valore di ρ_{n+1} mostra che ϖ_n non converge verso zero; ma è inoltre facile provare che ϖ_n cresce indefinitamente con n. Infatti osserviamo che indicando con λ una quantità positiva minore di g, potremo sempre prendere n così grande che si abbia

$$\frac{\varpi_{n+1}}{\varpi_n}>\left(1+\frac{1}{n}\right)^\lambda.$$

Moltiplicando questa disuguaglianza con tutte quelle che ne risultano sostituendo $n+1$, $n+2$, ...$n+m-1$ invece di n, si trova

$$\varpi_{n+m}>\varpi_n\left(\frac{n+m}{n}\right)^\lambda,$$

e questa formola mostra che ϖ_{n+m} cresce indefinitamente con m.

Se si ha $g=0$, la natura della serie proposta dipende dal valore di g_1. Per $g_1>0$, il valore di ρ_{n+1} mostra subito che la serie dei moduli finisce per essere una serie crescente; si può poi provare che ϖ_n non cresce indefinitamente con n. Infatti se

indichiamo con μ un numero maggiore di g_1, potremo sempre attribuire ad n un valore così grande che si abbia

$$\frac{\varpi_{n+1}}{\varpi_n} < \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^{-\mu},$$

ovvero

$$1 + \frac{g_1}{n^2} + \frac{g_2}{n^3} \ldots < 1 + \frac{\mu}{n^2} + \frac{\mu(\mu+1)}{2n^4} + \ldots$$

Da questa disuguaglianza si ricava

$$\left(\frac{n}{n-1}\right)^\mu \varpi_n > \left(\frac{n+1}{n}\right)^\mu \varpi_{n+1} > \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^\mu \varpi_{n+2} > \cdots > \left(\frac{n+m}{n+m-1}\right)^\mu \varpi_{n+m},$$

da cui segue

$$\varpi_{n+m} < \left(\frac{n}{n-1}\right)^\mu \varpi_n ;$$

quindi ϖ_{n+m} non può crescere indefinitamente con m.

Per $g_1 < 0$, la serie dei moduli è decrescente, ma non indefinitamente. Infatti per n sufficientemente grande si ha

$$\frac{\varpi_{n+1}}{\varpi_n} > \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^\lambda,$$

ove λ indica un numero positivo maggiore del valore assoluto di g_1.

Da questa disuguaglianza si ricava

$$\left(\frac{n-1}{n}\right)^\lambda \varpi_n < \left(\frac{n}{n+1}\right)^\lambda \varpi_{n+1} < \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^\lambda \varpi_{n+2} < \cdots < \left(\frac{n+m-1}{n+m}\right) \varpi_{n+m},$$

da cui segue

$$\varpi_{n+m} > \left(\frac{n-1}{n}\right)^\lambda \varpi_n :$$

dunque ϖ_{n+m} non può avere per limite zero.

Finalmente se $g_1 = 0$, le disuguaglianze precedenti sussi-

stono sempre avuto riguardo al segno della prima delle quantità $g_2, g_3, \ldots$ che non si annulla. Dunque possiamo conchiudere che se $g=0$, ϖ_n converge al crescere di n verso un limite finito e determinato differente da zero.

Ora si ha

$$u_n = \varpi_n\, e^{i\omega_n}, \quad \omega_n = \theta_0 + \theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n ;$$

quindi se $g > 0$, u_n cresce indefinitamente con n, e per conseguenza la serie proposta è divergente. Se $g=0$ e h differente da 0, u_n converge verso limiti finiti ma non determinati. Infatti indicando con α un numero positivo minore del valore assoluto di h, avremo per grandi valori di n, che il valore assoluto di θ_{n+1}, sarà $> \frac{\alpha}{n}$; talchè

$$\theta_{n+1} + \theta_{n+2} + \cdots + \theta_{n+m} > \alpha\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{n+m-1}\right).$$

Dunque la somma

$$\theta_{n+1} + \theta_{n+2} + \cdots + \theta_{n+m} = \omega_{n+m} - \omega_n ,$$

cresce indefinitamente con m, poichè la serie del secondo membro è divergente; e per conseguenza l'espressione

$$e^{i\omega_{n+m}} = \cos \omega_{n+m} + i \operatorname{sen} \omega_{n+m} ,$$

non ha limite determinato.

Se finalmente $g=0$ e $h=0$, u_n converge al crescere di n verso un limite finito e determinato differente da zero. Infatti supponiamo che sia $h_{\mu-1}$ la prima delle quantità $h_1, h_2, \ldots$ che non si annulla e facciamo $\lambda > h_{\mu-1} > \gamma$; potremo sempre prendere n così grande che si abbia

$$\frac{\lambda}{n^\mu} > \theta_{n+1} > \frac{\gamma}{n^\mu} ;$$

da cui segue

$$\lambda\left[\frac{1}{n^\mu}+\frac{1}{(n+1)^\mu}+\cdots+\frac{1}{(n+m-1)^\mu}\right]$$

$$>\omega_{n+m}-\omega_n>\mu\left[\frac{1}{n^\mu}+\frac{1}{n^{\mu+1}}+\cdots+\frac{1}{(n+m-1^\mu}\right].$$

Se ora facciamo crescere m, la quantità fra parentesi è una serie convergente, poichè $\mu>2$; quindi ω_{n+m} converge verso un limite finito e determinato, poichè μ e λ si possono far differire da $h_{\mu-1}$ tanto poco quanto ci piace; ma nell'ipotesi fatta anche ϖ_n converge verso un limite finito e determinato; dunque ec. Laonde la serie proposta è per $g=0$ divergente o indeterminata, poichè il suo termine generale non ha zero per limite.

4°. Per tutti i punti della circonferenza limite che corrispondono a valori di φ che non sono multipli pari di π, la serie U è semplicemente convergente se si ha

$$-1\leq g<0.$$

Poniamo infatti

$$V=(1-x)\,U=v_0+v_1x+v_2x^2+\cdots$$
$$=u_0+(u_1-u_0)x+(u_2-u_1)x^2+\cdots\;;$$

la serie V è della stessa natura della serie U. E invero si ha

$$\frac{v_{n+1}}{v_n}=\frac{\frac{u_{n+1}}{u_n}-1}{1-\frac{u_{n-1}}{u_n}},$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=1+\frac{a_1}{n}+\frac{a_2}{n^2}+\cdots,$$

$$\frac{u_n}{u_{n-1}}=1+\frac{a_1}{n-1}+\frac{a_2}{(n-1)^2}+\cdots$$
$$=1+\frac{a_1}{n}+\frac{a_2+a_1}{n^2}+\cdots,$$

da cui

$$\frac{u_{n-1}}{u_n} = 1 - \frac{a_1}{n} - \frac{a_2 + a_1 - a_1^2}{n^2} - \cdots,$$

e per conseguenza

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{1 + \frac{a_2}{a_1}\frac{1}{n} + \cdots}{1 + \frac{a_2 + a_1 - a_1^2}{a_1}\frac{1}{n} + \cdots} = 1 + \frac{a_1 - 1}{n} + \cdots$$

Dunque la serie V è convergente, poichè essendo $g < 0$, si ha $g - 1 < -1$.

Dall' equazione

$$U = \frac{V}{1 - x},$$

risulta quindi che la serie U è convergente per tutti i valori di $x = e^{i}$ diversi da 1, poichè per $x = 1$ l' equazione precedente dà $U = \frac{0}{0}$.

5°. Per quei punti della circonferenza limite che corrispondono a valori di φ uguali a un multiplo pari di π, la serie U è indeterminata se $g = -1$ e h differente da zero, divergente se $g = -1$ e $h = 0$, come pure per $g > -1$.

In questo caso la serie proposta si riduce a

$$U' = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots$$

Per dimostrare l' ultima parte del nostro teorema, premettiamo i seguenti lemmi.

1°. *Se $b_1, b_2, \ldots b_r$ sono r quantità dello stesso segno e $a_1, a_2, \ldots a_r$ r quantità qualunque, si ha*

$$\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \cdots + \frac{a_r}{b_r} = \beta\, M(a_1, a_2, \ldots a_r),$$

ove $\beta = \frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} + \cdots + \frac{a_r}{b_r}$ e $M(a_1, a_2, \ldots a_r)$ *indica una quan-*

tità media fra le quantità $a_1, a_2, \ldots a_r$, *cioè una quantità compresa fra la maggiore e la minore.*

Sia A la massima e a la minima fra le quantità $a_1, a_2, \ldots a_r$; le differenze

$$\frac{A}{b_1} - \frac{a_1}{b_1}, \quad \frac{a_1}{b_1} - \frac{a}{b_1},$$

$$\frac{A}{b_2} - \frac{a_2}{b_2}, \quad \frac{a_2}{b_2} - \frac{a}{b_2},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\frac{A}{b_r} - \frac{a_r}{b_r}, \quad \frac{a_r}{b_r} - \frac{a}{b_r},$$

avranno tutte lo stesso segno; quindi le somme

$$A\beta - \left(\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \cdots + \frac{a_r}{b_r}\right),$$

$$\left(\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \cdots + \frac{a_r}{b_r}\right) - a\beta,$$

saranno altresì quantità dello stesso segno; laonde

$$\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \cdots + \frac{a_r}{b_r} = M(\beta a_1, \beta a_2, \ldots . \beta a_r).$$

Ora osserviamo che le due differenze

$$A - M(a_1, a_2, \ldots . a_r),$$

$$M(a_1, a_2, \ldots . a_r) - a,$$

sono positive; quindi le due differenze

$$\beta A - \beta M(a_1, a_2, \ldots . a_r),$$

$$\beta M(a_1, a_2, \ldots . a_r) - \beta a,$$

hanno lo stesso segno, e per conseguenza

$$\beta M(a_1, a_2, \dots a_r) = M(\beta a_1, \beta a_2, \dots \beta a_r),$$

lo che dimostra il teorema.

2°. *Se nella serie* U' *la prima delle quantità* $a_1, a_2, \dots$ *che non si annulla è* a_μ, $\mu > 1$, *potremo fare*

$$u_n = v + \frac{w_n}{n^{\mu-1}},$$

ove v *è una quantità indipendente di* n *e* w_n *si conserva sempre finita al crescere di* n.

Abbiamo già dimostrato che nell'ipotesi contenute in questo enunciato, u_n tende al crescere di n verso un limite finito diverso da zero che potremo indicare con v. Ciò posto, facciamo

$$\frac{u_n}{u_{n-1}} = 1 + \frac{k_n}{n^\mu},$$

$$u_n = \alpha_n + i\beta_n, \qquad k_n = s_n + i t_n,$$

$$p_n = s_n \alpha_{n-1} - t_n \beta_{n-1}, \quad q_n = t_n \alpha_{n-1} + s_n \beta_{n-1};$$

avremo

$$u_{n-1} - u_n = -\frac{p_n + i q_n}{n^\mu},$$

da cui

$$u_n - u_{n+1} = -\frac{p_{n+1} + i q_{n+1}}{(n+1)^\mu},$$

$$u_{n+1} - u_{n+2} = -\frac{p_{n+2} + i q_{n+2}}{(n+2)^\mu},$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

$$u_{n+r-1} - u_{n+r} = -\frac{p_{n+r} + i q_{n+r}}{(n+r)^\mu}.$$

Sommando le ultime equazioni si ottiene

$$u_n - u_{n+r} = -\frac{p_{n+1} + i\,q_{n+1}}{(n+1)^\mu} - \cdots - \frac{p_{n+r} + i\,q_{n+r}}{(n+r)^\mu}.$$

Sieno

$$\sigma_{n,r} = \frac{1}{(n+1)^\mu} + \cdots + \frac{1}{(n+r)^\mu},$$

$P_{n,r}$ la media fra la maggiore e la minore delle quantità

$$p_{n+1}, \ldots p_{n+r},$$

e $Q_{n,r}$ la medesima espressione per le quantità

$$q_{n+1}, \ldots q_{n+r};$$

avremo

$$u_n - u_{n+r} = -(P_{n,r} + i\,Q_{n,r})\,\sigma_{n,r}.$$

Indichiamo con P_n, Q_n, σ_n i limiti rispettivi delle quantità

$$P_{n,r},\ Q_{n,r},\ \sigma_{n,r},$$

facendo crescere indefinitamente r mentre n resta costante, otterremo

$$u_n = v - (P_n + i\,Q_n)\,\sigma_n.$$

Le quantità P_n e Q_n restano finite comunque grande si prenda n, poichè lo stesso accade per α_n, β_n, s_n, t_n, e per conseguenza anche per p_n e q_n. La medesima cosa si verifica per σ_n; infatti si ha

$$\begin{aligned}
\sigma_n &= \frac{1}{(n+1)^\mu} + \frac{1}{(n+2)^\mu} + \cdots \\
&\overline{<} \left(\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots\right)\frac{1}{(n+1)^{\mu-2}} \\
&< \left(\frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \cdots\right)\frac{1}{n^{\mu-2}} \\
&= \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \cdots\right)\frac{1}{n^{\mu-2}} \\
&= \frac{1}{n^{\mu-1}}.
\end{aligned}$$

Quindi potremo fare $\sigma_n = \frac{\varepsilon_n}{n^{\mu-1}}$ ove $\varepsilon_n < 1$, talchè ponendo

$$\varepsilon_n (P_n + i Q_n) = -w_n ,$$

avremo

$$u_n = v + \frac{w_n}{n^{\mu-1}} ,$$

ove w_n resta finita qualunque sia n.

Ritornando ora alla serie U', poniamo

$$P_n = \left(1 + \frac{g+hi}{m}\right)\left(1 + \frac{g+hi}{m+1}\right)\cdots\left(1 + \frac{g+hi}{m+n}\right),$$

avremo

$$\frac{u_{n+1}}{P_{n+1}} : \frac{u_n}{P_n} = \left(1 + \frac{g+hi}{n} + \cdots\right)\left(1 + \frac{g+hi}{m+n+1}\right)^{-1}$$

$$= 1 + \frac{a'_2}{n^2} + \cdots ;$$

quindi pel lemma precedente potremo fare

$$u_n = P_n \left(v + \frac{w_n}{n}\right),$$

ove v è una quantità indipendente da n e w_n una quantità finita per qualunque valore di n.

Laonde posto

$$U'_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n ,$$

$$S_n = P_1 + P_2 + P_3 + \cdots + P_n ,$$

$$S'_n = w_1 P_1 + \frac{w_2}{2} P_2 + \cdots + \frac{w_n}{n} P_n ,$$

avremo

$$U'_n = v S_n + S'_n \cdot$$

Ma

$$\frac{P_{n+1}}{n+1} : \frac{P_n}{n} = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\left(1 + \frac{g+hi}{m+n+1}\right)$$

$$= 1 + \frac{g-1+hi}{n} + \cdots ,$$

quindi poichè $g-1 < -1$ e w_n ha un limite finito, la serie S'_n converge verso un limite finito. Dunque la somma U'_n è convergente, indeterminata o divergente insieme a S_n.

Ora dall'eguaglianza

$$\frac{P_{n+1}}{P_n} = 1 + \frac{g+hi}{m+n+1} ,$$

si ricavano le formole

$$(m+1) P_1 - m P_0 = (g+1+hi) P_0 ,$$

$$(m+2) P_2 - (m+1) P_1 = (g+1+hi) P_1 ,$$

$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad ,$$

$$(m+n+1) P_{n+1} - (m+n) P_n = (g+1+hi) P_n ,$$

che sommate insieme danno

$$S_n + P_0 = P_0 + P_1 + \cdots + P_n = \frac{(m+n+1) P_{n+1} - m P_0}{g+1+hi} .$$

Da questa formola risulta che tolto il caso in cui si abbia contemporaneamente $g=-1$ e $h=0$, il valore di S_n risulta da quello dell'espressione $(m+n+1) P_{n+1}$.

Ma si ha

$$\frac{(m+n+1) P_{n+1}}{(m+n) P_n} = \left(1 + \frac{g+hi}{m+n+1}\right)\left(1 + \frac{m+1}{n}\right)\left(1 + \frac{m}{n}\right)^{-1}$$

$$= 1 + \frac{g+1+hi}{n} + \cdots ,$$

dunque S_n e per conseguenza U'_n è convergente, come già sapevamo, se $g < -1$, indeterminata se $g = -1$ e h differente da zero, poichè in queste ipotesi il valore di $(m+n+1) P_{n+1}$ resta sempre finito, ma non tende verso un limite determinato; è divergente se $g > -1$, il valore di $(m+n+2) P_{n+2}$ aumentando in questo caso indefinitamente con n.

Se finalmente $g = -1$ e $h = 0$, la serie $P_0 + P_1 + P_2 + \cdots$ è divergente.

Infatti per questi valori si ha

$$P_n = \left(1 - \frac{1}{m}\right)\left(1 - \frac{1}{m+1}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{m+n}\right) = \frac{m-1}{m+n},$$

da cui segue

$$P_0 + P_1 + \cdots + P_n = (m-1)\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m+1} + \cdots + \frac{1}{m+n}\right);$$

se ora facciamo crescere n indefinitamente, la serie del secondo membro diventa una serie divergente, dunque ec.

238. Il teorema che abbiamo dimostrato ci permette di trovare i criterii di convergenza della serie binomiale, nel caso generale in cui tanto la variabile quanto l'esponente sieno numeri complessi. E invero consideriamo la serie

$$S = 1 + mx + \frac{m(m+1)}{1.2}x^2 + \frac{m(m+1)(m+2)}{1.2.3.}x^3 + \cdots,$$

ove $m = s + ti, x = re^{\varphi i}$; indicando con u_n il coefficiente di x^n, troveremo

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(1 + \frac{s+ti}{n}\right)\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-1} = 1 + \frac{s-1+ti}{n} + \cdots;$$

quindi potremo enunciare il seguente teorema, che comprende come caso particolare quello dimostrato nel n° 159.

Alla serie S *corrisponde il cerchio di convergenza di raggio* 1. *Sulla circonferenza di questo cerchio la serie* S *è convergente indipendentemente dall' ordine dei termini per tutti i valori*

negativi di s; *è semplicemente convergente se si ha* $1 > s \geq 0$ e φ *differente da zero; in tutti gli altri casi è divergente o indeterminata.* [1]

239. Come seconda applicazione consideriamo la serie

$$\frac{1}{a^\mu} + \frac{1}{(a+b)^\mu} + \frac{1}{(a+2b)^\mu} + \cdots ,$$

ove $\mu = p + qi$. Questa serie nell'ipotesi di $b = 1$, $a = 1$, $q = 0$ si riduce alla serie armonica che abbiamo considerata nel n° 91; in guisa che può considerarsi come il tipo generale della serie armonica. Il rapporto fra due termini consecutivi di questa serie è dato da

$$\left(\frac{a+nb}{a+(n+1)b}\right)^\mu = \left(1 + \frac{a}{nb}\right)^\mu \left(1 + \frac{a+b}{nb}\right)^{-\mu} = 1 - \frac{p+qi}{n} + \cdots ;$$

quindi la serie proposta è convergente indipendentemente dall'ordine dei termini se $p > 1$, ed è divergente o indeterminata in tutti gli altri casi.

Dal teorema di Weierstrass si deducono facilmente i seguenti.

240. *Una serie reale*

$$U = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots ,$$

ove si ha

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n^p + \alpha_1 n^{p-1} + \alpha_2 n^{p-2} + \cdots + \alpha_n}{n^p + \beta_1 n^{p-1} + \beta_2 n^{p-2} + \cdots + \beta_n},$$

è convergente se la differenza $\alpha_1 - \beta_1$ *è* < -1; *divergente in tutti gli altri casi.* [2]

---

[1] Questo teorema è stato dimostrato la prima volta rigorosamente da Abel in una Memoria inserita nel 1° Volume del *Giornale di Crelle.*

[2] Gauss, *Disquis. generales circa seriem infin.* Vol. 2° delle *Memorie della Società Reale di Gottinga*, pag. 19.

Infatti nell'ipotesi assunta si ha

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=1+\frac{\alpha_1-\beta_1}{n}+\cdots,$$

e questa eguaglianza dimostra il teorema.

Esempio. La serie

$$\frac{1}{(1+k)(a+1)}+\frac{1.2}{(2+k)(a+1)(a+2)}+\frac{1.2.3}{(3+k)(a+1)(a+2)(a+3)}+\cdots,$$

è convergente per qualunque valore di k e per tutti i valori positivi di a; poichè il rapporto fra due termini consecutivi essendo

$$\frac{n^2+(k+1)n+k}{n^2+(k+a+2)\,n+(k+1)\,(a+1)},$$

la condizione di convergenza è $-a-1<-1$, da cui $a>0$.

Se indichiamo con $f\,(k,a)$ la somma della serie data, cioè se facciamo

$$f(k,a)=\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1}{n+k}\,\frac{1.2.3\ldots.n}{(a+1)(a+2)\ldots.(a+n)},$$

è facile vedere che i valori di $f(k,a+m)$ e di $f(k+m,a)$ ove m è un numero intero si possono ridurre a quello di $f(k,a)$. Infatti si ha successivamente

$$\frac{k}{a+1}f(k,a+1)=\Sigma\,\frac{k}{n+k}\,\frac{1.2.3\ldots.n}{(a+1)(a+2)\ldots.(a+n+1)},$$

$$\left(1-\frac{k}{a+1}\right)f(k,a+1)=\Sigma\,\frac{a+1-k}{n+k}\,\frac{1.2.3\ldots.n}{(a+1)(a+2)\ldots(a+n+1)},$$

$$\left(1-\frac{k}{a+1}\right)f(k,a+1)-f(k,a)=-\Sigma\,\frac{1.2.3\ldots.n}{(a+1)(a+2)\ldots.(a+n+1)}$$

$$=-\left[f(0,a)-\frac{1}{a+1}\right]=-\frac{1}{a(a+1)},$$

poichè (83)

$$f(0,a)=\frac{1}{(a+1)}+\frac{1}{(a+1)(a+2)}+\frac{1\,.\,2}{(a+1)(a+2)(a+3)}+\cdots=\frac{1}{a},$$

da cui

$$f(0,a)-\frac{1}{a+1}=\frac{1}{(a+1)(a+2)}+\frac{1\,.\,2}{(a+1)(a+2)(a+3)}+\cdots$$

$$=\Sigma\,\frac{1\,.\,2\,.\,3\ldots\,n}{(a+1)\ldots(a+n+1)}.$$

Quindi avremo

$$(1)\qquad f(k,a)=\frac{1}{a(a+1)}+\frac{a+1-k}{a+1}f(k,a+1).$$

Inoltre si ha

$$f(k,a)=\frac{1}{(1+k)(a+1)}+\sum_{n=2}\frac{1\,.\,2\ldots(n-1)}{(a+1)\ldots(a+n)}$$

$$-k\sum_{n=2}\frac{1}{n+k}\,\frac{1\,.\,2\ldots(n-1)}{(a+1)\ldots(a+n)}$$

$$=\frac{1}{(1+k)(a+1)}+\sum_{n=1}\frac{1\,.\,2\ldots\,n}{(a+1)\ldots(a+n+1)}$$

$$-k\sum_{n=1}\frac{1}{n+1+k}\,\frac{1\,.\,2\ldots n}{(a+1)\ldots(a+n+1)}$$

$$=\frac{1}{(1+k)(a+1)}+\frac{1}{a(a+1)}-\frac{k}{a+1}f(k+1,a+1)\,;$$

ma dall' equazione (1) si ricava

$$\frac{k}{a-k}f(k+1,a)=\frac{k}{a(a+1)(a-k)}+\frac{k}{a+1}f(k+1,a+1)\,,$$

e per conseguenza sommando questa equazione colla precedente,

$$(2)\qquad (a-k)f(k,a)=\frac{1}{1+k}-kf(k+1,a).$$

Le formole (1) e (2) dimostrano ciò che volevamo; la prima

sussiste per tutti i valori di k eccettuato $k=a+1$, e la seconda per tutti i valori di k eccetto $k=a$ e $k=0$.

Da esse apparisce manifesto che $f(k,a)$ si può considerare come conosciuta per ogni valore di k, e ogni valore positivo di a se è conosciuta per tutti i valori di k e di a compresi fra 0 e 1.

Se $k=a+m$, $f(k,a)$ è una funzione razionale di a; infatti dalla (1) si deduce

$$f(k,a)=\frac{1}{a(a+1)}+\frac{a-k+1}{(a+1)^2(a+2)}+\frac{(a-k+1)(a-k+2)}{(a+1)(a+2)^2(a+3)}+\cdots,$$

poichè $f(k,a)$ va a zero al crescere di a. Il secondo membro si arresta al termine

$$\frac{(a-k+1)(a-k+2)\ldots.(a-k+m-1)}{(a+1)(a+2)\ldots.(a+m-1)^2(a+m)},$$

se m è un numero intero e positivo.

Se k è un numero intero e positivo, la formola (2) mostra che $f(k,a)$ si può far dipendere da

$$f(1,a)=\frac{1}{a(a+1)}+\frac{a}{(a+1)^2(a+2)}+\frac{a}{(a+2)^2(a+3)}+\cdots,$$

che ha una relazione semplicissima con una serie nota nell'Analisi trascendente. Infatti dall'equazione precedente e dall'altra

$$f(0,a)=\frac{1}{a(a+1)}+\frac{1}{(a+1)(a+2)}+\frac{1}{(a+2)(a+3)}+\cdots,$$

risulta

$$\frac{1}{a}f(1,a)+\frac{1}{a}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{(a+1)^2}+\frac{1}{(a+2)^2}+\cdots=\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{1}{(a+n)^2}.$$

La serie del secondo membro è stata data da Gauss.

L'ultima equazione può scriversi sotto la forma

$$\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{1}{n+1}\,\frac{1.2\ldots.n}{a(a+1)\ldots.(a+n)}=\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{1}{(a+n)^2}.$$

Si può mostrare facilmente che anche per i valori di $k=a+m$, ove $m<0$, $f(k,a)$ si può far dipendere dalla serie di Gauss che per semplicità indicheremo con $\varphi(a)$. Infatti dalla formola (2) si ricava

$$f(k,a)=\frac{1}{a}-\frac{k}{k+1}\frac{1}{a+1}-\frac{k}{a+1}\left(\frac{1}{a+1}-\frac{k+1}{k+2}\frac{1}{a+2}-\frac{k+1}{a+2}\right)\frac{1}{a+2}-\cdots$$

$$=\frac{1}{a}-k\left(\frac{1}{(k+1)(a+1)}+\frac{1}{(a+1)^2}\right)+\frac{k(k+1)}{a+1}\left(\frac{1}{(k+2)(a+2)}+\frac{1}{(a+2)^2}\right)$$

$$-\frac{k(k+1)(k+2)}{(a+1)(a+2)}\left(\frac{1}{(k+3)(a+3)}+\frac{1}{(a+3)^2}\right)+\cdots$$

quindi facendo $k=a$

$$f(a,a)=\frac{1}{a}-\frac{2a}{(a+1)^2}+\frac{2a}{(a+2)^2}-\frac{2a}{(a+3)^2}+\cdots$$

$$=-\frac{1}{a}+2a\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{(-1)^n}{(a+n)^2},$$

da cui

$$\frac{1}{a^2}+f(a,a)=2\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{(-1)^n}{(a+n)^2}.$$

Ma si ha

$$\sum\frac{(-1)^n}{(a+n)^2}=2\sum\frac{1}{(a+2n)^2}-\sum\frac{1}{(a+n)^2},$$

per conseguenza

$$\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{1}{a+n}\cdot\frac{1.2\ldots\ldots n}{a(a+1)\ldots\ldots(a+n)}=\varphi\left(\frac{a}{2}\right)-2\varphi(a),$$

come volevamo dimostrare.

241. *Una serie a termini positivi*

$$U=u_1+u_2+u_3+\cdots$$

ove si ha

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 + \frac{g}{n} + \frac{g_1}{n^2} + \cdots,$$

è convergente o divergente, secondochè posto

$$p_n = \frac{n\, u_n}{u_{n+1}} - n - 1,$$

si ha $\lim p_n > 0$ o $\lim p_n \leq 0$.

Cominciamo dall'osservare che le quantità p_n e $n-(n+1)\frac{u_{n+1}}{u_n}$ hanno lo stesso limite; poichè si ha

$$n - (n+1)\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{u_{n+1}}{u_n} p_n.$$

Ciò posto, nel n° 118 abbiamo dimostrato che una serie a termini positivi è convergente o divergente secondochè

$$\lim \left[n - (n+1)\frac{u_{n+1}}{u_n} \right],$$

è una quantità positiva o negativa. Se questo limite è uguale a zero, non si può affermar nulla in generale. Ma è facile provare che le serie delle quali ci occupiamo presentemente sono divergenti anche in questa ultima ipotesi.

Infatti si ha

$$\lim \left[n - (n+1)\frac{u_{n+1}}{u_n} \right] = -1 - g.$$

Ora, pel teorema generale che abbiamo dimostrato, la serie proposta è convergente pei soli valori di $g < -1$; dunque è divergente anche se $g = -1$, cioè se $-1 - g = 0$.

212. *La condizione necessaria e sufficiente affinchè la serie considerata nel teorema precedente sia convergente è che*

$$\lim n\, u_n = 0.$$

Nel n° 122 abbiamo già dimostrato che questa condizione è necessaria; resta quindi a provare che è altresì sufficiente.

Infatti si ha

$$\frac{(n+1)\,u_{n+1}}{n\,u_n} = 1 + \frac{g+1}{n} + \cdots ;$$

ora la quantità $g+1$, non può essere >0, poichè altrimenti $n\,u_n$ dovrebbe crescere indefinitamente con n; non può essere $=0$, poichè allora $\lim n\,u_n$ sarebbe una quantità finita differente da zero; dunque essendo $\lim n\,u_n = 0$, si deve necessariamente verificare la condizione $g+1>0$, nel qual caso sappiamo che la serie proposta è convergente. [1]

Serie ipergeometriche. — Serie di Heine.

243. I Geometri distinguono col nome d'ipergeometrica la serie di Gauss

$$F(\alpha,\beta,\gamma,x) = 1 + \frac{\alpha\,.\,\beta}{1\,.\,\gamma}\,x + \frac{\alpha(\alpha+1)\,.\,\beta(\beta+1)}{1\,.\,2\,.\,\gamma(\gamma+1)}\,x^2 + \cdots,$$

che dipende da quattro elementi α, β, γ, x, e che comprende come

[1] Questi due teoremi sono stati trovati per via interamente diversa da Kummer *(Über die Convergenz und Divergenz der unendlichen Reihen.* 13° Volume dal *Giornale di Crelle)*; noi li abbiamo dedotti come semplici corollari dal teorema di Weierstrass. Olivier, nel secondo volume del predetto Giornale, aveva creduto che il criterio contenuto nel secondo teorema fosse generale ed applicabile a qualunque serie. Abel avvertì l'errore di Olivier ed inoltre dimostrò che non si poteva trovare nessuna funzione s_n di n, tale che la serie fosse convergente o divergente secondochè $\lim s_n\,u_n$ fosse uguale o maggiore di zero. È degno di osservazione che tutti gli autori che ci hanno preceduto nella esposizione della teoria delle serie, anche quando citano l'avvertenza di Abel, tralasciano però di osservare (lo che pur ci sembra di grandissima importanza) che il teorema di Olivier, se non è vero in generale, è esatto per innumerevoli serie: e pure la *Memoria* di Kummer è pubblicata sin dal 1833!

casi particolari un gran numero fra le più importanti serie dell'Analisi. Così si verificano facilmente le seguenti relazioni

$$(1+x)^m = F(-m, \beta, \beta, -x),$$

$$e^x = F\left(1, k, 1, \frac{x}{k}\right),$$

$$l(1+x) = xF(1, 1.2, -x),$$

$$sen\, x = xF\left(k, k', \frac{3}{2}, -\frac{x^2}{4kk'}\right),$$

$$cos\, x = F\left(k, k', \frac{1}{2}, -\frac{x^2}{4kk'}\right),$$

ove k e k' indicano numeri infinitamente grandi.

La generalità di cui gode la serie di Gauss e l'uso che ne faremo nel seguito di questa prima parte del nostro Trattato, c'inducono a dimostrarne le proprietà fondamentali. Siccome però la serie di Gauss si deduce dall'altra

$$\varphi(\alpha, \beta, \gamma, q, x)$$

$$= 1 + \frac{(1-q^\alpha)(1-q^\beta)}{(1-q)(1-q^\gamma)}x + \frac{(1-q^\alpha)(1-q^{\alpha+1})(1-q^\beta)(1-q^{\beta+1})}{(1-q)(1-q^2)(1-q^\gamma)(1-q^{\gamma+1})}x^2 + \cdots,$$

studiata da Heine facendo in essa $q=1$; gioverà eseguire i nostri ragionamenti sulla serie di Heine, tanto più che questa, come più generale, comprende un numero maggiore di serie particolari, fra le quali quelle importantissime che si presentano nella teoria delle funzioni ellittiche.

244. Se indichiamo con u_n il coefficiente di x^n, avremo

$$u_n = \frac{(1-q^\alpha)(1-q^{\alpha+1})\ldots(1-q^{\alpha+n-1})(1-q^\beta)(1-q^{\beta+1})\ldots(1-q^{\beta+n-1})}{(1-q)(1-q^2)\ldots(1-q^n)(1-q^\gamma)(1-q^{\gamma+1})\ldots(1-q^{\gamma+n-1})};$$

ponendo in questa espressione $\frac{1}{q}$ invece di q, troveremo per coefficiente di x^n

$$u_n \frac{1}{q^{(\alpha+\beta-\gamma-1)n}}$$

quindi si ha

$$\varphi(\alpha, \beta, \gamma, q, x) = \varphi\left(\alpha, \beta, \gamma, \frac{1}{q}, x q^{\alpha+\beta-\gamma-1}\right),$$

lo che mostra che quando $q > 1$, la serie di Heine si può trasformare in un'altra in cui il quarto elemento sia < 1; talchè per determinarne la convergenza basta considerare soltanto il caso di $q < 1$.

Ora si ha

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(1 - q^{\alpha+n})(1 - q^{\beta+n})}{(1 - q^{n+1})(1 - q^{\gamma+n})},$$

da cui nell'ipotesi di $q < 1$

$$\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 \;;$$

quindi la serie di Heine è convergente se il modulo di x è < 1 ed è divergente se questo modulo è > 1; il caso in cui il modulo di x è $= 1$ sarà da noi considerato nel Capitolo seguente.

Per $q = 1$, la serie di Heine si trasforma in quella di Gauss, per la quale il rapporto fra due termini consecutivi è

$$\frac{(\alpha + n)(\beta + n)}{(n + 1)(n + \gamma)} = \frac{n^2 + (\alpha + \beta) n + \alpha \beta}{n^2 + (\gamma + 1) n + \gamma}:$$

quindi la serie di Gauss è convergente se $mod\, x < 1$, divergente se $mod\, x > 1$; per $mod\, x = 1$ la serie è convergente se

$$\alpha + \beta - \gamma - 1 < -1,$$

cioè se $\alpha + \beta - \gamma < 0$ e divergente negli altri casi.

In quel che segue per semplicità invece di $\varphi(\alpha, \beta, \gamma, q, x)$ scriveremo fra parentesi quei soli elementi che differiscono da $\alpha, \beta, \gamma, q, x$; così φ indicherà la funzione proposta ove gli ele-

menti non hanno subìta nessuna modificazione, $\varphi(\alpha+n)$ la funzione che risulta da φ sostituendo $\alpha+n$ a α e lasciando immutati gli altri elementi, ec.

Ciò posto, passiamo a dimostrare le principali proprietà di cui gode la serie di Heine.

245. La serie φ non varia permutando fra di loro gli elementi α e β, cioè si ha

$$\varphi(\alpha,\beta,\gamma,q,x)=\varphi(\beta,\alpha,\gamma,q,x). \tag{1}$$

Inoltre il termine generale della serie $\varphi\,(q\,x)$ è

$$\frac{(1-q^\alpha)(1-q^{\alpha+1})\dots(1-q^{\alpha+n-1})(1-q^\beta)(1-q^{\beta+1})\dots(1-q^{\beta+n-1})}{(1-q)(1-q^2)\dots(1-q^n)(1-q^\gamma)(1-q^{\gamma+1})\dots(1-q^{\gamma+n-1})}\,q^n x^n.$$

Se lo togliamo dal termine generale della serie φ, otterremo

$$\frac{(1-q^\alpha)(1-q^\beta)}{(1-q^\gamma)}\,x.\frac{(1-q^{\alpha+1})\dots(1-q^{\alpha+n-1})(1-q^{\beta+1})\dots(1-q^{\beta+n-1})}{(1-q)\dots(1-q^{n-1})(1-q^{\gamma+1})\dots(1-q^{\gamma+n-1})}\,x^{n-1},$$

e il secondo fattore è il termine generale della serie

$$\varphi(\alpha+1,\ \beta+1,\ \gamma+1);$$

quindi avremo

$$\varphi-\varphi(q\,x)=\frac{(1-q^\alpha)(1-q^\beta)}{(1-q^\gamma)}\,x\,\varphi(\alpha+1,\ \beta+1,\ \gamma+1), \tag{2}$$

lo che mostra che la funzione $\varphi(\alpha+n,\ \beta+n,\ \gamma+n)$ ove n è un numero intero si esprime mediante le funzioni

$$\varphi,\varphi(q\,x),\ \varphi(q^2x),\dots\ \varphi(q^nx).$$

Fra due delle funzioni

$$\varphi(\alpha+1),\ \varphi(\beta+1),\ \varphi(\gamma+1),\varphi(\alpha-1),\ \varphi(\beta-1),\ \varphi(\gamma-1),$$

e la funzione φ hanno luogo equazioni lineari, che sono molto importanti per la teoria di queste serie. Il numero di tali equa-

zioni è $\frac{6.5}{1.2}=15$; ma noi daremo solo quelle di cui avremo bisogno in seguito.

Indichiamo con u_n, u'_n, u''_n, i coefficienti rispettivi di x^n nelle serie φ, $\varphi(\alpha+1)$, $\varphi(\gamma-1)$, avremo

$$u_n=\frac{(1-q^\alpha)\dots(1-q^{\alpha+n-1})(1-q^\beta)\dots(1-q^{\beta+n-1})}{(1-q)\dots(1-q^n)(1-q^\gamma)\dots(1-q^{\gamma+n-1})},$$

$$u'_n=\frac{(1-q^{\alpha+1})\dots(1-q^{\alpha+n})(1-q^\beta)\dots(1-q^{\beta+n-1})}{(1-q)\dots(1-q^n)(1-q^\gamma)\dots(1-q^{\gamma+n-1})},$$

$$u''_n=\frac{(1-q^\alpha)\dots(1-q^{\alpha+n-1})(1-q^\beta)\dots(1-q^{\beta+n-1})}{(1-q)\dots(1-q^n)(1-q^{\gamma-1})\dots(1-q^{\gamma+n-2})};$$

da cui

$$(1-q^{\gamma-1})\,u''_n=(1-q^{\gamma+n-1})\,u_n,$$

$$(1-q^\alpha)\,u'_n=(1-q^{\alpha+n})\,u_n.$$

Moltiplicando la seconda equazione per $q^{\gamma-\alpha-1}$, avremo

$$q^{\gamma-\alpha-1}(1-q^\alpha)\,u'_n=(q^{\gamma-\alpha-1}-q^{\gamma+n-1})\,u_n,$$

e per conseguenza

$$(1-q^{\gamma-\alpha-1})\,u_n+q^{\gamma-\alpha-1}(1-q^\alpha)\,u'_n=(1-q^{\gamma+n-1})u_n=(1-q^{\gamma-1})u''_n.$$

Dunque fra le tre funzioni φ, $\varphi(\alpha+1)$ e $\varphi(\gamma-1)$ si verifica l'equazione

$$(3)\quad (1-q^{\gamma-\alpha-1})\,\varphi+q^{\gamma-\alpha-1}(1-q^\alpha)\,\varphi(\alpha+1)-(1-q^{\gamma-1})\,\varphi(\gamma-1)=0.$$

Ritenendo per u_n il significato precedente, poniamo ancora

$$u'_n=\frac{(1-q^{\alpha-1})\dots(1-q^{\alpha+n-2})(1-q^\beta)\dots(1-q^{\beta+n-1})}{(1-q)\dots(1-q^n)(1-q^\gamma)\dots(1-q^{\gamma+n-1})},$$

$$u''_n=\frac{(1-q^\alpha)\dots(1-q^{\alpha+n-1})(1-q^\beta)\dots(1-q^{\beta+n-1})}{(1-q)\dots(1-q^n)(1-q^{\gamma+1})\dots(1-q^{\gamma+n})},$$

in guisa che u'_n e u''_n sono rispettivamente i coefficienti di x^n in $\varphi(\alpha-1)$ e $\varphi(\gamma+1)$.

Il coefficiente di x^n in

$$\left(1-q^{\alpha+\beta-\gamma-1}\,x\right)\varphi-\varphi(\alpha-1),$$

sarà

$$u_n-u_{n-1}\,q^{\alpha+\beta-\gamma-1}-u'_n$$

$$=u_{n-1}\left[\frac{\left(1-q^{\beta+n-1}\right)\,q^{\alpha-1}}{\left(1-q^{\gamma+n-1}\right)}-q^{\alpha+\beta-\gamma-1}\right]$$

$$=u_{n-1}\left[\frac{q^{\alpha-1}-q^{\alpha+\beta-\gamma-1}}{1-q^{\gamma+n-1}}\right],$$

poichè si ha

$$u_n=u_{n-1}\frac{\left(1-q^{\alpha+n-1}\right)\left(1-q^{\beta+n-1}\right)}{\left(1-q^{n}\right)\left(1-q^{\gamma+n-1}\right)},$$

$$u'_n=u_n\frac{\left(1-q^{\alpha-1}\right)}{\left(1-q^{\alpha+n-1}\right)}=u_{n-1}\frac{\left(1-q^{\alpha-1}\right)\left(1-q^{\beta+n-1}\right)}{\left(1-q^{n}\right)\left(1-q^{\gamma+n-1}\right)}.$$

Ma d' altra parte il coefficiente di x^n nella serie

$$q^{\alpha+\beta-\gamma-1}\,x\left(1-q^{\gamma-\beta}\right)\varphi(\gamma+1),$$

è

$$u''_{n-1}\left(q^{\alpha+\beta-\gamma-1}-q^{\alpha-1}\right)=u_{n-1}\frac{\left(1-q^{\gamma}\right)}{1-q^{\gamma+n-1}}\left(q^{\alpha+\beta-\gamma-1}-q^{\alpha-1}\right),$$

poichè

$$u''_n=u_n\frac{1-q^{\gamma}}{1-q^{\gamma+n}}.$$

Laonde si vede chiaramente che fra le tre funzioni

$$\varphi,\varphi(\alpha-1)\ \text{e}\ \varphi(\gamma+1),$$

si ha la relazione

$$(4)\quad (1-q^{\gamma})(1-q^{\alpha+\beta-\gamma-1}x)\varphi-(1-q^{\gamma})\varphi(\alpha-1)+q^{\alpha+\beta-\gamma-1}x(1-q^{\gamma-\beta})\varphi(\gamma+1)=0.$$

Da queste relazioni apparisce manifesto che tre funzioni qualunque $\varphi(\alpha,\beta,\gamma)$, $\varphi(\alpha',\beta',\gamma')$ e $\varphi(\alpha'',\beta'',\gamma'')$ ove tanto le α quanto le β e le γ differiscono fra di loro per numeri interi, sono legate insieme da equazioni lineari, che si possono in ogni caso ottenere mediante facili eliminazioni dalle prime 15. Ma noi per la ricerca di queste formole rinviamo alle Memorie di Heine e di Gauss, contentandoci di aggiungere le dimostrazioni di altre equazioni che servono di base alla riduzione in prodotti infiniti e in frazioni continue della serie di Heine e di quella ipergeometrica.

246. Indicando con u_n e u'_n i coefficienti rispettivi di x^n nelle funzioni φ e $\varphi(\gamma-1)$ avremo evidentemente

$$u_n(1-q^{\gamma+n-1})=u'_n(1-q^{\gamma-1}),$$

da cui

$$u'_n-u_n=q^{\gamma-1}\frac{1-q^n}{1-q^{\gamma-1}}u_n$$

$$=q^{\gamma-1}\frac{(1-q^{\alpha})(1-q^{\beta})}{(1-q^{\gamma-1})(1-q^{\gamma})}\cdot\frac{(1-q^{\alpha+1})\dots(1-q^{\alpha+n-1})(1-q^{\beta+1})\dots(1-q^{\beta+n-1})}{(1-q)\dots(1-q^{n-1})(1-q^{\gamma+1})\dots(1-q^{\gamma+n-1})}.$$

Quindi

$$\varphi(\gamma-1)-\varphi=\sum_{n=1}(u'_n-u_n)x^n$$

$$=q^{\gamma-1}x\frac{(1-q^{\alpha})(1-q^{\beta})}{(1-q^{\gamma-1})(1-q^{\gamma})}\sum_{n=1}\frac{(1-q^{\alpha+1})\dots(1-q^{\alpha+n-1})(1-q^{\beta+1})(\dots(1-q^{\beta+n-1})}{(1-q)\dots(1-q^{n-1})(1-q^{\gamma+1})\dots(1-q^{\gamma+n-1})}x^{n-1},$$

ovvero

$$(5)\quad \varphi(\gamma-1)-\varphi=q^{\gamma-1}x\frac{(1-q^{\alpha})(1-q^{\beta})}{(1-q^{\gamma-1})(1-q^{\gamma})}\varphi(\alpha+1,\beta+1,\gamma+1).$$

In modo interamente analogo si ottengono le altre equazioni

$$(6)\qquad \varphi(\alpha+1)-\varphi=q^{\alpha}x\,\frac{1-q^{\beta}}{1-q^{\gamma}}\,\varphi(\alpha+1,\beta+1,\gamma+1)\;,$$

$$(7)\qquad \varphi(\alpha-1,\beta+1)-\varphi=-q^{\alpha-1}x\,\frac{1-q^{\beta+1-\alpha}}{1-q^{\gamma}}\,\varphi(\beta+1,\gamma+1).$$

Se in queste due formole permutiamo fra loro α e β, avremo le altre due

$$(8)\qquad \varphi(\beta+1)-\varphi=q^{\beta}x\,\frac{1-q^{\alpha}}{1-q^{\gamma}}\,\varphi(\alpha+1,\beta+1,\gamma+1)\;,$$

$$(9)\qquad \varphi(\alpha+1,\beta-1)-\varphi=q^{\alpha}x\,\frac{1-q^{\beta-\alpha-1}}{1-q^{\gamma}}\,\varphi(\alpha+1,\gamma+1).$$

Sottraendo dalla (8) la (6) si ha

$$(10)\qquad \varphi(\beta+1)-\varphi(\alpha+1)=-q^{\alpha}x\,\frac{1-q^{\beta-\alpha}}{1-q^{\gamma}}\,\varphi(\alpha+1,\beta+1,\gamma+1).$$

Se nelle formole (5) e (8) mutiamo γ in $\gamma+1$ e poscia sottraiamo la prima dalla seconda, avremo

$$(11)\qquad \varphi(\beta+1,\gamma+1)-\varphi=q^{\beta}x\,\frac{(1-q^{\alpha})(1-q^{\gamma-\beta})}{(1-q^{\gamma})(1-q^{\gamma+1})}\,\varphi(\alpha+1,\beta+1,\gamma+2),$$

da cui permutando fra loro α e β

$$(12)\qquad \varphi(\alpha+1,\gamma+1)-\varphi=q^{\alpha}x\,\frac{(1-q^{\beta})(1-q^{\gamma-\alpha})}{(1-q^{\gamma})(1-q^{\gamma+1})}\,\varphi(\alpha+1,\beta+1,\gamma+2).$$

247. Ricaviamo finalmente due altre formole importanti. Dalle formole (2) e (6) facendo $\beta=\gamma$, si ha

$$1-\frac{\varphi(\alpha,\beta,\beta,q,qx)}{\varphi(\alpha,\beta,\beta)}=(1-q^{\alpha})\,x\,\frac{\varphi(\alpha+1,\beta+1,\beta+1)}{\varphi(\alpha,\beta,\beta)}\,,$$

$$1-\frac{\varphi(\alpha,\beta,\beta)}{\varphi(\alpha+1,\beta,\beta)}=q^{\alpha}x\;,$$

poichè

$$\varphi(\alpha+1,\beta+1,\beta+1)=\varphi(\alpha+1,\beta,\beta)\ ;$$

quindi

$$(13)\qquad \varphi(\alpha,\beta,\beta,q,x)=\frac{1-q^{\alpha}x}{1-x}\,\varphi(\alpha,\beta,\beta,q,qx).$$

La serie φ è convergente se $x=q^{\gamma-\alpha-\beta}$ tutte le volte che $\gamma-\alpha-\beta$ è una quantità positiva. Ciò posto, se nell' equazione (4) poniamo $\alpha+1$ per α e poi facciamo $x=q^{\gamma-\alpha-\beta}$, troveremo immediatamente

$$(14)\quad \varphi\left(\alpha,\beta,\gamma,q,q^{\gamma-\alpha-\beta}\right)=\frac{1-q^{\gamma-\beta}}{1-q^{\gamma}}\ \varphi\left(\alpha+1,\beta,\gamma+1,q,q^{\gamma-\alpha-\beta}\right).$$

Se α o β sono numeri interi negativi, φ è una serie finita. Indicando con μ un numero intero e positivo e facendo $\alpha=-\mu$, la formola (14) diventa

$$\varphi\left(-\mu,\beta,\gamma,q,q^{\gamma+\mu-\beta}\right)=\frac{1-q^{\gamma-\beta}}{1-q^{\gamma}}\ \varphi\left(1-\mu,\beta,\gamma+1,q,q^{\gamma+\mu-\beta}\right).$$

Sostituendo in questa equazione successivamente $\mu-1$, $\mu-2$, $\mu-3$ ec., invece di μ e $\gamma+1,\gamma+2,\gamma+3$ ec., invece di γ, avremo

$$\varphi\left(1-\mu\,\beta,\gamma+1,q,q^{\gamma+\mu-\beta}\right)=\frac{1-q^{\gamma+1-\beta}}{1-q^{\gamma+1}}\,\varphi\left(2-\mu,\beta,\gamma+2,q,q^{\gamma+\mu-\beta}\right),$$

$$\varphi\left(2-\mu,\beta,\gamma+2,q,q^{\gamma+\mu-\beta}\right)=\frac{1-q^{\gamma+1-\beta}}{1-q^{\gamma+1}}\,\varphi\left(3-\mu,\beta,\gamma+3,q,q^{\gamma+\mu-\beta}\right),$$

. . . . ,

$$\varphi\left(-1,\beta,\gamma+\mu-1,q,q^{\gamma+\mu-\beta}\right)=\frac{1-q^{\gamma-\beta+\mu-1}}{1-q^{\gamma+\mu-1}},$$

poichè la funzione φ è uguale a 1, se il suo primo elemento è zero.

Moltiplicando insieme tutte queste formole, otterremo

$$(15)\qquad \varphi\left(-\mu,\beta,\gamma,q,q^{\gamma+\mu-\beta}\right)=\frac{(1-q^{\gamma-\beta})(1-q^{\gamma+1-\beta})\ldots(1-q^{\gamma+\mu-1-\beta})}{(1-q^{\gamma})(1-q^{\gamma+1})\ldots(1-q^{\gamma+\mu-1})}.$$

Facendo $q=1$ in tutte le formole precedenti si trovano le formole analoghe per la serie di Gauss. ([1])

Serie derivate.

248. *Se la serie*

$$f(x)=u_0+u_1x+u_2x^2+u_3x^3+\cdots+u_nx^n+\cdots,$$

è convergente indipendentemente dall'ordine dei termini, la serie

$$\varphi(x)=u_1+2u_2x+3u_3x^2+\cdots+nu_nx^{n-1}+\cdots,$$

che si deduce dalla proposta moltiplicando ciascun termine per l'esponente corrispondente di x *e dividendo il risultato per* x, *è altresì convergente indipendentemente dall'ordine dei termini ed ha per somma*

$$\varphi(x)=\lim_{h=0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

Indichiamo con α_n il modulo di u_n, con r il modulo di x, e con ρ il più grande valore di r pel quale il limite dell'espressione $r\,\alpha_n$ è una quantità finita. Per tutti i valori di $r<\rho$, la serie

$$1+2\frac{r}{\rho}+3\frac{r^2}{\rho^2}+\cdots,$$

è convergente, poichè il limite del rapporto fra due termini consecutivi è uguale a $\frac{r}{\rho}<1$. Moltiplicando i termini di questa serie rispettivamente per i numeri

$$\alpha_1,\ \alpha_2\rho,\ \alpha_3\rho^2\ldots,$$

([1]) Vol. 34º del *Giornale di Crelle*, e la Memoria già citata di Gauss.

che non aumentano indefinitamente, otterremo la serie convergente

$$\alpha_1 + 2\,\alpha_2\, r + 3\,\alpha_3\, r^2 + \cdots$$

Dunque la serie $\varphi(x)$ è convergente indipendentemente dall'ordine dei termini per tutti i valori di $r < \rho$; cioè nei medesimi casi della serie $f(x)$.

La somma della seconda serie si determina con facilità tostochè sia nota la somma della prima serie. Infatti indichiamo con h una quantità sufficientemente piccola, in modo che la serie

$$f(x+h) = u_0 + u_1(x+h) + u_2(x+h)^2 + u_3(x+h)^3 + \cdots,$$

sia convergente insieme alla serie $f(x)$, allora la serie

$$f(x+h) - f(x) = u_1\, h + u_2(2x+h)\, h + u_3(3x^2 + 3x\,h + h^2)\, h + \cdots,$$

è altresì convergente, come pure la serie

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = u_1 + u_2(2x+h) + u_3(3x^2 + 3x\,h + h^2) + \cdots$$

Ora i termini della serie $\varphi(x)$ sono i limiti dei termini corrispondenti dell'ultima serie per $h = 0$, quindi

$$\varphi(x) = \lim \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

L'espressione $\lim \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ si chiama *funzione derivata* di $f(x)$ e s'indica con $f'(x)$; quindi potremo scrivere

$$f'(x) = u_1 + 2\,u_2\,x + 3\,u_3\,x^2 + \cdots$$

La serie contenuta nel secondo membro si dice serie derivata rispetto alla serie proposta.

249. Questo teorema permette di trovare con grandissima facilità la derivata delle funzioni trascendenti elementari.

La serie

$$1 + x + \frac{x^2}{1\,.\,2} + \frac{x^3}{1\,.\,2\,.\,3} + \cdots,$$

è convergente indipendentemente dall'ordine dei termini; la serie derivata è esattamente eguale alla precedente; dunque *la derivata di* e^x *è* e^x.

La serie

$$x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots,$$

è convergente indipendentemente dall'ordine dei termini per $x<1$; quindi la serie derivata

$$1-x+x^2-x^3+\cdots,$$

è convergente allo stesso modo per $x<1$. Ma la seconda serie ha per somma $\frac{1}{1+x}$; dunque *la derivata di* $l(1+x)$ *è uguale a* $\frac{1}{1+x}$.

La serie

$$1-\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^4}{1.2.3.4}-\cdots,$$

è convergente indipendentemente dai suoi termini; quindi la serie derivata

$$-x+\frac{x^3}{1.2.3}-\frac{x^5}{1.2.3.4.5}+\cdots,$$

è convergente al modo stesso; ma la seconda serie ha per somma $-\mathrm{sen}\,x$; dunque *la derivata di* cos x *è uguale a* — sen x.

Al modo stesso si prova che *la derivata di* sen x *è uguale a* cos x.

La serie

$$x+\frac{1}{2}\frac{x^3}{3}+\frac{1.3}{2.4}\frac{x^5}{5}+\frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{x^7}{7}+\cdots,$$

è convergente indipendentemente dall'ordine dei termini per tutti i valori di $x\leq 1$; quindi la serie derivata

$$1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1.3}{2.4}x^4+\frac{1.3.5}{2.4.6}x^6+\cdots,$$

è convergente al modo stesso; ma la seconda serie ha per somma $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; dunque la *derivata di* arcsen x *è uguale* a $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ec.

Sul calcolo delle serie numeriche che sono lentamente convergenti.

250. Una fra le quistioni più interessanti che si presentano nell'applicazione delle matematiche è la ricerca del valore approssimato delle serie numeriche. Tutte le volte che queste serie sono rapidamente convergenti, basta fare la somma di pochi termini per raggiungere un grado sufficiente di approssimazione; ma se la serie è dotata di una lenta convergenza, il metodo precedente non è più applicabile, perchè esige calcoli eccessivamente laboriosi. Per tali serie quindi sono stati investigati varii metodi che permettono di ottenere con facilità risultati molto approssimati. Due fra questi metodi ci sembrano degni di speciale menzione, uno per le serie a termini positivi proposto dall'eminente geometra Kummer (*Giornale di Crelle*, Vol. 16), l'altro dovuto ad Eulero (*Inst. calculi differentialis)*, che si applica alle serie con termini alternativamente positivi e negativi. Noi per non dilungarci di troppo, ci contenteremo di esporre il solo primo metodo; in quanto al secondo, che richiede particolari avvertenze affine di essere usato con sicurezza, rimandiamo alla Memoria di Poncelet *Application de la méthode des moyennes* ec., inserita nel tomo 13° del *Giornale di Crelle*.

Il metodo di Kummer si fonda sui seguenti lemmi.

251. *Data una serie convergente*

$$U = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots ,$$

a termini positivi, è sempre possibile trovare una funzione p_n *di* n, *tale che per* $n = \infty$, $p_n u_n$ *abbia per limite zero, e l'espressione*

$$q_n = \frac{p_n u_n}{u_{n+1}} - p_{n+1} ,$$

si mantenga sempre positiva ed abbia per limite 1

Infatti la serie U essendo convergente, basta fare

$$p_n = \frac{u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots}{u_n},$$

da cui

$$\lim p_n u_n = 0, \quad \lim q_n = 1.$$

252. *Il resto* R_n *della serie* U *è sempre compreso fra*

$$p_n u_n \quad e \quad \frac{p_n u_n}{q_n}.$$

Infatti dall'addizione dell'equazioni

$$p_n u_n - p_{n+1} u_{n+1} = q_n u_{n+1},$$
$$p_{n+1} u_{n+1} - p_{n+2} u_{n+2} = q_{n+1} u_{n+2},$$
$$p_{n+2} u_{n+2} - p_{n+3} u_{n+3} = q_{n+2} u_{n+3},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

si ricava

$$p_n u_n = q_n u_{n+1} + q_{n+1} u_{n+2} + q_{n+2} u_{n+3} + \cdots,$$

poichè $p_{n+\infty} u_{n+\infty} = 0$; quindi

$$\frac{p_n u_n}{q_n} = u_{n+1} + \frac{q_{n+1}}{q_n} u_{n+2} + \frac{q_{n+2}}{q_n} u_{n+3} + \cdots$$

Prendiamo ora n sufficiente grande perchè a cominciare da questo valore sino all'infinito, q_n cresca o decresca continuamente avvicinandosi sempre al suo limite 1. Nel primo caso si ha

$$q_n < 1, \quad q_{n+1} < 1, \quad q_{n+2} < 1, \ldots.$$

e

$$\frac{q_{n+1}}{q_n} > 1, \quad \frac{q_{n+2}}{q_n} > 1, \quad \frac{q_{n+3}}{q_n} > 1, \ldots.$$

dunque

$$p_n u_n < R_n < \frac{p_n u_n}{q_n}.$$

Nel secondo caso si trova al modo stesso

$$p_n u_n > R_n > \frac{p_n u_n}{q_n}.$$

253. Da questi lemmi apparisce manifesto che basterà il calcolo di pochi termini della serie U, tutte le volte che potremo determinare p_n in modo che per un discreto valore di n l'espressione q_n differisca pochissimo da 1.

Questa determinazione si effettua facilmente per le serie convergenti nelle quali il rapporto fra due termini consecutivi si avvicina costantemente all'unità al crescere di n ed è sviluppabile secondo le potenze intere discendenti di n. Supponiamo infatti che si abbia

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = 1 + \frac{h_1}{n} + \frac{h_2}{n^2} + \cdots$$

In questa ipotesi potremo prendere per p_n una funzione razionale di n che contenga $2r+2$ costanti arbitrarie

$$a_1, \ldots a_r, b_1, \ldots b_r, c_0, c_1;$$

cioè potremo fare

$$p_n = c_0 n + c_1 + \frac{a_1 n^{r-1} + a_2 n^{r-2} + \cdots + a_r}{n^r + b_1 n^{r-1} + \cdots + b_r},$$

ovvero

$$p_n = c_0 n + c_1 + \frac{c_2}{n} + \frac{c_3}{n^2} + \cdots$$

Quindi avremo

$$\frac{p_n\, n_n}{u_{n+1}} = p_n + c_0 h_1 + (c_1 h_1 + c_0 h_2)\frac{1}{n} + (c_2 h_1 + c_1 h_2 + c_0 h_3)\frac{1}{n^2}$$

$$+ (c_3 h_1 + c_2 h_2 + c_1 h_3 + c_0 h_4)\frac{1}{n^3}$$

$$+ (c_4 h_1 + c_3 h_2 + c_2 h_3 + c_1 h_4 + c_0 h_5)\frac{1}{n^4}$$

$$+ (c_5 h_1 + c_4 h_2 + c_3 h_3 + c_2 h_4 + c_1 h_5 + c_0 h_6)\frac{1}{n^5}$$

$$+ \cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$p_{n+1} = p_n + c_0 - c_2 \frac{1}{n^2} - (2c_3 - c_2)\frac{1}{n^3} - (3c_4 - 3c_3 + c_2)\frac{1}{n^4}$$

$$- (4c_5 - 6c_4 + 4c_3 - c_2)\frac{1}{n^5}$$

$$- \cdots\cdots\cdots\cdots$$

Da queste formole si ricava

$$q_n = c_0 (h_1 - 1) + (c_1 h_1 + c_0 h_2)\frac{1}{n}$$

$$+ [c_2 (h_1 + 1) + c_1 h_2 + c_0 h_3]\frac{1}{n^2}$$

$$+ [c_3 (h_1 + 2) + c_2 (h_2 - 1) + c_1 h_3 + c_0 h_4]\frac{1}{n^3}$$

$$+ [c_4 (h_1 + 3) + c_3 (h_2 - 3) + c_2 (h_3 + 1) + c_1 h_4 + c_0 h_5]\frac{1}{n^4}$$

$$+ [c_5 (h_1 + 4) + c_4 (h_2 - 6) + c_3 (h_3 + 4) + c_2 (h_4 - 1) + c_1 h_5 + c_0 h_6]\frac{1}{n^5}$$

$$+ \cdots\cdots\cdots\cdots$$

Il coefficiente di $\frac{1}{n^{\mu+1}}$ è evidentemente dato dall'espressione

$$c_{\mu+1} (h_1 + \mu_1) + c_\mu (h_2 - \mu_2) + c_{\mu-1} (h_3 + \mu_3) + \cdots + c_2 (h_\mu + (-1)^{\mu-1} \mu_\mu)$$

$$+ c_1 h_{\mu+1} + c_0 h_{\mu+2}\,,$$

ove si ha

$$\mu_s = \frac{\mu(\mu-1)\ldots\ldots(\mu-s+1)}{1.2.3\ldots\ldots s}.$$

Poichè per $n = \infty$ deve aversi $q_n = 1$, c_0 dovrà essere determinata dalla formola $c_0(h_1 - 1) = 1$. Determiniamo ora le altre $2r+1$ costanti di p_n in modo che sieno eguali a zero i coefficienti delle potenze di $\frac{1}{n}$ sino a $\frac{1}{n^{2r+1}}$; avremo

$$(a) \left\{ \begin{aligned} 1 &= c_0(h_1 - 1), \\ 0 &= c_1 h_1 + c_0 h_2, \\ 0 &= c_2(h_1+1) + c_1 h_2 + c_0 h_3, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ 0 &= c_{2r+1}[h_1 + (2r)_1] + c_{2r}[h_2 - (2r)_2] + \cdots + c_1 h_{2r+1} + c_0 h_{2r+2}. \end{aligned} \right.$$

Mediante queste relazioni q_n acquisterà la forma

$$q_n = 1 + \frac{k_1}{n^{2r+2}} + \frac{k_2}{n^{2r+3}} + \cdots,$$

dalla quale risulta che non è necessario prendere n e r molto grandi perchè q_n differisca pochissimo da 1.

Ora dalla relazione

$$\frac{a_1 n^{r-1} + a_2 n^{r-2} + \cdots + a_r}{n^r + b_1 n^{r-1} + \cdots + b_r} = \frac{c_2}{n} + \frac{c_3}{n^2} + \cdots,$$

moltiplicando i due membri per $n^r + b_1 n^{r-1} + \cdots + b_r$ ed eguagliando i coefficienti delle stesse potenze di n, si deducono l'equazioni

$$(b) \left\{ \begin{aligned} a_1 &= c_2, \\ a_2 &= c_3 + c_2 b_1, \\ a_3 &= c_4 + c_3 b_1 + c_2 b_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_r &= c_{r+1} + c_r b_1 + c_{r-1} b_2 + \cdots + c_2 b_{r-1}, \end{aligned} \right.$$

$$(c)\quad\left\{\begin{aligned}0&=c_{r+2}+c_{r+1}\,b_1+c_r\,b_2+\cdots+c_2\,b_r\,,\\0&=c_{r+3}+c_{r+2}\,b_1+c_{r+1}\,b_2+\cdots+c_3\,b_r\,,\\&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\0&=c_{2r+1}+c_{2r}\,b_1+c_{2r-1}\,b_2+\cdots+c_{r+1}\,b_r.\end{aligned}\right.$$

Determinate le quantità $c_0, c_1, c_2, \ldots c_{2r+1}$ mediante l'equazioni (a), l'equazioni (c) daranno i valori di $b_1, b_2, \ldots b_r$, e l'equazioni (b) quelli di $a_1, a_2, \ldots a_r$. A questo modo p_n è completamente determinato. Poi si calcola q_n, e quindi sono conosciuti i limiti $p_n\,u_n$ e $\frac{p_n\,u_n}{q_n}$.

Se sono m le cifre decimali eguali in questi due limiti, avremo così ottenuta la somma $u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots$ esatta fino alla cifra m^{esima}. Aggiungendo a questa somma quella dei primi n termini ottenuta nel modo usuale, avremo la somma della serie U.

Esempii. 1° Si abbia la serie

$$S=1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^3}+\cdots\,;$$

in questo caso abbiamo $u_n=\frac{1}{n^3}$; quindi

$$\frac{u_n}{u_{n+1}}=\left(\frac{n+1}{n}\right)^3=\left(1+\frac{1}{n}\right)^3=1+\frac{3}{n}+\frac{3}{n^2}+\frac{1}{n^3},$$

e per conseguenza

$$h_1=3\,,\ h_2=3\,,\ h_3=1\,,$$
$$h_4=h_5=\cdots=0.$$

L'equazioni (a) diventano per $r=5$

$$\begin{aligned}1&=2\,c_0,\\0&=3\,c_1+3\,c_0,\\0&=4\,c_2+3\,c_1+c_0,\\0&=5\,c_3+2\,c_2+c_1,\\0&=6\,c_4+2\,c_2,\\0&=7\,c_5-3\,c_4+5\,c_3-c_2,\\&\ldots\ldots\ldots\ldots,\end{aligned}$$

da cui

$$c_0 = \frac{1}{2},\ c_1 = -\frac{1}{2},\ c_2 = \frac{1}{4},\ c_3 = 0,\ c_4 = -\frac{1}{12},$$

$$c_5 = 0,\ c_6 = \frac{1}{12},\ c_7 = 0,\ c_8 = -\frac{3}{20},\ c_9 = 0,$$

$$c_{10} = \frac{5}{12},\ c_{11} = 0.$$

L'equazioni (c) diventano

$$0 = \frac{1}{12}b_1 - \frac{1}{12}b_3 + \frac{1}{4}b_5,$$

$$0 = -\frac{3}{20} + \frac{1}{12}b_2 - \frac{1}{12}b_4,$$

$$0 = -\frac{3}{20}b_1 + \frac{1}{12}b_3 - \frac{1}{12}b_5,$$

$$0 = \frac{5}{12} - \frac{3}{20}b_2 + \frac{1}{12}b_4,$$

$$0 = \frac{5}{12}b_1 - \frac{3}{20}b_3 + \frac{1}{12}b_5,$$

che sono soddisfatte da

$$b_1 = 0,\ b_2 = 4,\ b_3 = 0,\ b_4 = \frac{22}{10},\ b_5 = 0.$$

Sostituendo questi valori nell'espressioni (b), troveremo

$$a_1 = \frac{1}{4},\ a_2 = 0,\ a_3 = \frac{11}{12},\ a_4 = 0,\ a_5 = \frac{3}{10}.$$

L'espressione di p_n acquista quindi la forma

$$p_n = \frac{n-1}{2} + \frac{30n^4 + 110n^2 + 36}{120n^5 + 480n^3 + 264n}.$$

Per $n = 10$, troveremo

$$p_{10} = 4{,}524917485403728\ldots\ldots,$$
$$p_{11} = 5{,}02266517306974\ldots\ldots,$$
$$q_{10} = 1{,}00000000000261\ldots\ldots,$$
$$p_{10}u_{10} = 0{,}00452491748540373\ldots,$$
$$\frac{p_{10}u_{10}}{q_{10}} = 0{,}0045249174853949 1\ldots\ldots$$

Le due ultime formole sono i limiti fra i quali è compresa la somma della serie

$$\frac{1}{11^3} + \frac{1}{12^3} + \frac{1}{13^3} + \cdots$$

Se ora osserviamo che si ha

$$1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \cdots + \frac{1}{10^3} = 1{,}19753198567419325\ldots,$$

vedremo che si potrà prendere per somma della serie proposta il numero

$$1{,}2020569031595,$$

e l'errore sarà minore di una unità della quattordicesima cifra decimale. Kummer avverte che per trovare un valore egualmente esatto col metodo ordinario, bisognerebbe sommare più di 10 milioni di termini della serie proposta.

2°. Come secondo esempio consideriamo la serie

$$S = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1 \,.\, 3}{2 \,.\, 4}\right)^3 + \left(\frac{1 \,.\, 3 \,.\, 5}{2 \,.\, 4 \,.\, 6}\right)^3 + \cdots,$$

che ha per termine generale

$$u_n = \left[\frac{1 \,.\, 3 \,.\, 5 \ldots (2n-3)}{2 \,.\, 4 \,.\, 6 \ldots (2n-2)}\right]^3.$$

Sviluppando in serie il rapporto fra due termini consecutivi, troveremo

$$h_1=\frac{3}{2},\ h_2=\frac{6}{2^2},\ h_3=\frac{10}{2^3},\ h_4=\frac{15}{2^4},\ h_5=\frac{21}{2^5},\ h_6=\frac{28}{2^6},$$

$$h_7=\frac{36}{2^7},\ h_8=\frac{45}{2^8},\ldots$$

Se prendiamo $r=3$, e sostituiamo i valori precedenti nell' equazioni (a), avremo

$$c_0=2,\ c_1=-2,\ c_2=\frac{1}{5},\ c_3=\frac{3}{20},\ c_4=\frac{3}{40},\ c_5=0,$$

$$c_6=-\frac{81}{13\,.\,160},\ c_7=-\frac{81}{13\,.\,320}.$$

In virtù di questi valori l' equazioni (c) diventano

$$0=\frac{3}{40}b_1+\frac{3}{20}b_2+\frac{1}{5}b_3,$$

$$0=-\frac{81}{13\,.\,160}+\frac{3}{40}b_2+\frac{3}{20}b_3,$$

$$0=-\frac{81}{13\,.\,320}-\frac{81}{13\,.\,160}b_1+\frac{3}{40}b_3,$$

che sono soddisfatte da

$$b_1=-\frac{9}{4},\ b_2=\frac{243}{104},\ b_3=-\frac{189}{208}.$$

L' equazioni (b) danno finalmente

$$a_1=\frac{1}{5},\ a_2=-\frac{3}{40},\ a_3=\frac{213}{1040}.$$

Laonde avremo

$$p_n=2(n-1)+\frac{208n^2-312n+213}{1040n^3-2340n^2+2430n-945}.$$

Prendendo $n = 10$, troveremo

$$p_{10} = 18,021574597126 \ldots,$$

$$p_{11} = 20,0494775864 35 \ldots,$$

$$q_{10} = 1,00000000190 \ldots\ldots,$$

$$p_{10} u_{10} = 0,11497881583 \ldots\ldots,$$

$$\frac{p_{10} u_{10}}{q_{10}} = 0,11497881561 \ldots\ldots$$

Se ai due ultimi numeri aggiungiamo la somma dei primi 10 termini della serie proposta, che è

$$1,278225113868 \ldots,$$

vedremo facilmente che potremo fare

$$S = 1,393203929;$$

l' errore non può cadere che sulle cifre che seguono l' ultima.

CAPITOLO XI.

PRODOTTI INFINITI.

Definizione.

254. Un prodotto composto di un numero infinito di fattori si chiama *prodotto infinito*.

Se facciamo

$$P_n = u_0\, u_1\, u_2 \ldots . u_{n-1}$$

e indichiamo con P il limite verso il quale tende P_n al crescere di n, il prodotto infinito

$$P = u_0\, u_1\, u_2\, u_3 \ldots . ,$$

si dice *convergente* se P è una quantità finita; *indeterminato* se P ha valori finiti ma differenti a seconda del valore di n; *divergente* se $P = \infty$.

Criterii di convergenza.

255. I prodotti infiniti a simiglianza delle serie non si possono usare con sicurezza se non sono convergenti; quindi è di molta importanza conoscere in quali casi un prodotto infinito è convergente. In quel che segue abbiamo riuniti i principali teoremi che si conoscono su questo argomento.

Cominciamo dall'avvertire che se i fattori u sono tutti per una data quantità maggiori di 1, il prodotto infinito è certamente divergente; per contro se questi fattori sono tutti per una data quantità minori di 1, il prodotto infinito è uguale a zero. Infatti se supponiamo nel primo caso che tutti i fattori siano $> 1 + h$ e $h > 0$, avremo

$$P_n > (1 + h)^n, \text{ da cui } \lim P_n = \infty ;$$

se nel secondo caso supponiamo che tutti i fattori siano $< \frac{1}{1+h}$, avremo

$$P_n < \left(\frac{1}{1+h}\right)^n, \text{ da cui } \lim P_n = 0.$$

Da ciò segue che basta considerare solo il caso in cui i fattori si avvicinano indefinitamente all'unità.

Ciò posto, scriveremo P sotto la forma

$$P = (1 + v_0)(1 + v_1)(1 + v_2) \ldots,$$

ove $v_0, v_1, v_2, \ldots$ indicano quantità positive o negative, i cui valori numerici sono minori dell'unità, e decrescono indefinitamente al crescere di n. In questa ipotesi è facile vedere che la convergenza o divergenza del prodotto infinito si può far dipendere da quella della serie $v_0, v_1, v_2, \ldots$ Se infatti prendiamo i logaritmi dell'ultima equazione, avremo

$$lP = l(1 + v_0) + l(1 + v_1) + l(1 + v_2) + \cdots,$$

ovvero

$$lP = v_0 \frac{l(1 + v_0)}{v_0} + v_1 \frac{l(1 + v_1)}{v_1} + v_2 \frac{l(1 + v_2)}{v_2} + \cdots$$

Ora le quantità $\frac{l(1 + v_0)}{v_0}, \frac{l(1 + v_1)}{v_1}, \frac{l(1 + v_2)}{v_2} \ldots\ldots,$ tendono verso l'unità; quindi per un teorema già dimostrato (88) l'ultima serie è convergente o divergente insieme alla serie

$$v_0 + v_1 + v_2 + \cdots$$

I seguenti teoremi servono a rendere più manifesto questo legame e danno criterii di più facile applicazione.

256. *Se la serie*

$$S = v_1 + v_2 + v_3 + \cdots,$$

è convergente, è pure convergente il prodotto infinito

$$P = (1 + v_1)(1 + v_2)(1 + v_3) \ldots,$$

ed ha un valore diverso da zero o eguale a zero, secondochè la serie

$$S' = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + \cdots,$$

è convergente o divergente.

Se $S = -\infty$, *si ha* $P = 0$; *se* $S = +\infty$, *si ha* $P = \infty$, *tutte le volte che la serie* S' *non è divergente.*

Nel prodotto P possiamo considerare tutte le quantità v minori di $\frac{1}{2}$, in guisa che avremo (184)

$$\begin{aligned} lP &= l(1+v_1) + l(1+v_2) + l(1+v_3) + \cdots \\ &= v_1 + v_2 + v_3 + \cdots \\ &\quad - (\mu_1 v_1^2 + \mu_2 v_2^2 + \mu_3 v_3^2 + \cdots) \end{aligned}$$

ove $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots$ sono numeri positivi minori dell'unità.

Il teorema è una conseguenza evidente dell'ultima formola avendo presente che la serie

$$\mu_1 v_1^2 + \mu_2 v_2^2 + \mu_3 v_3^2 + \cdots,$$

è convergente e divergente insieme alla serie S' e che si ha $P = e^{lP}$.

Se si ha contemporaneamente $S = +\infty$, $S' = +\infty$, lP si presenta sotto la forma $\infty - \infty$, che può rappresentare una quantità finita o infinita; quindi allora non si può affermar nulla sulla natura del prodotto P, eccetto se le v sono tutte positive, nel quale caso è facile vedere che il prodotto infinito è divergente, poichè si ha

$$P_n = (1+v_1)(1+v_2)\ldots(1+v_n) > 1 + v_1 + v_2 + \cdots + v_n$$

ESEMPII. 1°. I prodotti infiniti

$$\left(1+\frac{a^2}{1^2}\right)\left(1+\frac{a^2}{2^2}\right)\left(1+\frac{a^2}{3^2}\right)\ldots,$$

$$\left(1-\frac{a^2}{1^2}\right)\left(1-\frac{a^2}{2^2}\right)\left(1-\frac{a^2}{3^2}\right)\ldots,$$

sono convergenti ed hanno valori diversi da zero, poichè la serie

$$\frac{a^2}{1^2}+\frac{a^2}{2^2}+\frac{a^2}{3^2}+\cdots,$$

è convergente.

2°. Il prodotto infinito

$$P=\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\left(1+\frac{1}{5}\right)\left(1+\frac{1}{6}\right)\left(1-\frac{1}{7}\right)\left(1-\frac{1}{8}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{10}\right)\cdots,$$

è convergente ed ha un valore diverso da zero, poichè le due serie

$$-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}-\frac{1}{7}-\frac{1}{8}-\frac{1}{9}-\frac{1}{10}+\cdots,$$

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots,$$

sono entrambe convergenti.

3°. Il prodotto infinito

$$P=\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(1+\frac{1}{\sqrt{4}}\right)\left(1-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\cdots,$$

è uguale a zero, poichè la serie

$$\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}-\frac{1}{\sqrt{5}}+\cdots,$$

è convergente, mentre la serie

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots,$$

è divergente.

4°. Il prodotto infinito

$$P=\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(1-\frac{1}{\sqrt{4}}\right)\cdots,$$

è uguale a zero, poichè la serie

$$\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\cdots,$$

è divergente, e tutti i secondi termini dei fattori sono negativi.

5°. Il prodotto infinito

$$\left(1+\frac{a}{1}\right)\left(1+\frac{a}{2}\right)\left(1+\frac{a}{3}\right)\cdots,$$

è divergente per a positivo ed eguale a zero per a negativo.

6°. Il prodotto infinito

$$\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(1+\frac{1}{\sqrt{4}}\right)\cdots,$$

è divergente, tuttochè le due serie

$$\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\cdots,$$

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots,$$

sieno entrambe divergenti.

257. Dal teorema precedente si deduce facilmente che la serie di Heine è divergente se $x=1$. Infatti il prodotto infinito

$$(1-q^r)(1-q^{r+1})(1-q^{r+2})\cdots,$$

ove $q<1$, ha un valore finito differente da zero, eccetto il caso di r uguale a zero e di r numero intero negativo. Dunque il termine generale della serie di Heine non avendo per limite zero, la serie è divergente.

258. *Se*

$$\begin{aligned}P_n&=(1+v_1)(1+v_2)\cdots(1+v_n)\\&=(1+h_1)(1+h_2)\cdots(1+h_r)(1-k_1)(1-k_2)\cdots(1-k_s),\end{aligned}$$

ove $h_1, h_2, \ldots h_r, k_1, k_2, \ldots k_s$ *sono quantità positive e*

r + s = n, *il prodotto infinito* P *è convergente, ed ha un valore finito diverso da zero se le due serie*

$$H = h_1 + h_2 + h_3 + \cdots,$$

$$K = k_1 + k_2 + k_3 + \cdots,$$

sono entrambe convergenti; è uguale a zero se la prima serie è convergente e la seconda divergente; è divergente insieme alla prima serie se la seconda è convergente.

Facciamo

$$Q_r = (1 + h_1)(1 + h_2)\ldots(1 + h_r),$$

$$Q_s = (1 - k_1)(1 - k_2)\ldots(1 - k_s),$$

avremo

$$P_n = Q_r Q_s.$$

Ora pel primo teorema se le serie H e K sono convergenti, le quantità Q_r e Q_s hanno limiti finiti diversi da zero; se la serie H è convergente e la serie K è divergente, Q_r ha per limite una quantità finita, e Q_s ha per limite zero; finalmente se la serie H è divergente e la K è convergente, Q_r cresce continuamente con r, e Q_s ha per limite una quantità finita. Dunque $P = \lim P_n$ nel primo caso è una quantità finita, nel secondo è uguale a zero, nel terzo è uguale all' infinito.

Esempio. Il prodotto infinito

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 + \frac{1}{3^2}\right)\cdots,$$

è eguale a zero, e il prodotto infinito

$$\left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 + \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right)\cdots,$$

è divergente, perchè la serie

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots.$$

è convergente, e la serie

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots,$$

è divergente.

Questo teorema non dà alcun risultato se le serie H e K sono simultaneamente divergenti, poichè in questo caso $\lim Q_r = \infty$ e $\lim Q_s = 0$. Per es.: nel prodotto infinito

$$\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdots\cdots,$$

le serie H e K sono divergenti; ma dal primo teorema risulta che questo prodotto è uguale ad una quantità finita positiva, poichè la serie

$$-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\cdots,$$

è uguale a zero, e la serie

$$\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots$$

$$=2\left(\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots\right),$$

è convergente.

259. *Il prodotto infinito*

$$P=(1+v_1)(1+v_2)(1+v_3)\cdots\cdots,$$

ove $v_1, v_2, v_3, \ldots$ *sono numeri complessi, ha un valore finito differente da zero se la serie*

$$v_1+v_2+v_3+\cdots,$$

è convergente indipendentemente dall' ordine dei termini.

Se supponiamo che i moduli delle quantità v_1, v_2, ... che

indicheremo rispettivamente con $\rho_1, \rho_2, \ldots$ siano minori di $\frac{1}{2}$, avremo

$$l P = v_1 + v_2 + v_3 + \cdots - (\mu_1 v_1^2 + \mu_2 v_2^2 + \mu_3 v_3^2 + \cdots) ,$$

ove $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots$ sono numeri che hanno per moduli quantità minori dell'unità. Ora se la serie $v_1 + v_2 + \cdots$ è convergente indipendentemente dall'ordine dei termini, le due serie

$$\rho_1 + \rho_2 + \rho_3 + \cdots ,$$

$$\rho_1^2 + \rho_2^2 + \rho_3^2 + \cdots ,$$

sono entrambe convergenti. Ma i termini di questa ultima serie sono i moduli dei termini corrispondenti della serie

$$v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + \cdots ,$$

dunque la convergenza di questa serie è una conseguenza di quella della serie $v_1 + v_2 + \cdots$; e dal valore di $l P$ risulta che in questa ipotesi P ha un valore finito differente da zero. [1]

Prodotti infiniti per le radici dei numeri interi.

260. Se indichiamo con α una quantità positiva minore dell'unità è noto che si ha

$$l\left(\frac{1}{1-\alpha}\right) > \alpha > l(1+\alpha);$$

aggiungendo a questa disuguaglianza tutte quelle che ne risultano sostituendo invece di α successivamente

$$\frac{\alpha}{1+\alpha}, \quad \frac{\alpha}{1+2\alpha} \cdots\cdots \frac{\alpha}{1+(n-1)\alpha},$$

[1] Questo teorema è di Weierstrass, ma la nostra dimostrazione è assai più semplice di quella dell'illustre Geometra tedesco. Vedi il Vol. 51 del *Giornale di Crelle*, pag. 20.

troveremo

$$l\left(\frac{1+(n-1)\alpha}{1-\alpha}\right)$$

$$>\alpha\left(1+\frac{1}{1+\alpha}+\frac{1}{1+2\alpha}+\cdots+\frac{1}{1+(n-1)\alpha}\right)>l(1+n\alpha)\ ,$$

ovvero facendo $\alpha=\frac{x}{n}$,

$$\frac{1}{x}l\left(\frac{1+x-\frac{x}{n}}{1-\frac{x}{n}}\right)$$

$$>\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+x}+\frac{1}{n+2x}+\cdots+\frac{1}{n+(n-1)x}\right)>\frac{1}{x}l(1+x).$$

Laonde se facciamo crescere n indefinitamente, avremo

$$l(1+x)=lim\left(\frac{x}{n}+\frac{x}{n+x}+\frac{x}{n+2x}+\frac{x}{n+(n-1)x}\right).$$

Poniamo $\frac{n}{x}=m$, $x=a-1$, ove a indica un numero intero e positivo; l'ultima formola diventa

$$l\,a=lim\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{m+1}+\frac{1}{m+2}+\cdots+\frac{1}{m\,a-1}\right)\ ,$$

e dividendo pel numero intero e positivo r

$$l\sqrt[r]{a}=lim\left(\frac{1}{m\,r}+\frac{1}{(m+1)\,r}+\frac{1}{(m+2)\,r}+\cdots+\frac{1}{(m\,a-1)\,r}\right).$$

Ora si ha

$$\frac{1}{(m+n)\,r}=l\left(1+\frac{1}{(m+n)\,r}\right)+\frac{\mu_n}{(m+n)^2r^2}\ ,$$

ove μ_n è una quantità minore di 1. Se quindi osserviamo che

$$lim\left[\frac{\mu_0}{m^2 r^2}+\frac{\mu_1}{(m+1)^2 r^2}+\cdots+\right]=0\,,$$

poichè la serie

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots\,,$$

è convergente, avremo

$$\sqrt[r]{a}=lim\left(1+\frac{1}{ma}\right)\left(1+\frac{1}{(m+1)r}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{(ma-1)r}\right)\,,$$

o ciò ch' è lo stesso

$$\sqrt[r]{a}=lim\frac{(m+1)r+1}{(m+1)r}\cdot\frac{(m+2)r+1}{(m+2)r}\cdots\frac{mar+1}{mar}.$$

Non altereremo il valore del secondo membro moltiplicandolo pel prodotto

$$\frac{r+1}{r}\cdot\frac{2r+1}{2r}\cdots\frac{mr+1}{mr}\cdot\frac{ra}{ra+a}\cdot\frac{2ra}{2ra+a}\cdots\frac{mar}{mar+a}\,;$$

in guisa che potremo scrivere

$$\sqrt[r]{a}=lim\frac{r+1}{r}\cdot\frac{2r+1}{2r}\cdots\frac{ar+1}{ar+a}\cdot\frac{(a+1)r+1}{(a+1)r}\cdots\frac{2ar+1}{2ar+a}\cdots\frac{mar+1}{mar+a}.$$

Se facciamo

$$P_n=\frac{(na+1)r+1}{(na+1)r}\cdot\frac{(na+2)r+1}{(na+2)r}\cdots\frac{((n+1)a-1)r+1}{((n+1)a-1)r}\cdot\frac{(n+1)ar+1}{(n+1)ar+a}\,,$$

$$Q_n=\frac{nar+1}{nar+a}\cdot\frac{(na+1)r+1}{(na+1)r}\cdots\frac{((n+1)a-1)r+1}{((n+1)a-1)r}\,,$$

è chiaro che potremo porre l'ultima eguaglianza sotto le due forme

$$\sqrt[r]{a} = P_0 \,.\, P_1 \,.\, P_2 \ldots$$

$$\sqrt[r]{a} = a\, Q_0 \,.\, Q_1 \,.\, Q_2 \ldots$$

Poichè

$$\frac{(n+1)\,ar+1}{(n+1)\,ar+a} = \frac{(n+1)\,ar+1}{(n+1)\,ar} \cdot \frac{(n+1)\,r}{(n+1)\,r+1},$$

avremo evidentemente

$$P_n > \left(1+\frac{1}{(n+1)\,ar}\right)^a \frac{(n+1)\,r}{(n+1)\,r+1}$$

$$> \left(1+\frac{1}{(n+1)\,r}\right) \frac{(n+1)\,r}{(n+1)\,r+1},$$

ovvero

$$P_n > 1.$$

Parimente, poichè

$$\frac{nar+1}{nar+a} = \frac{nr}{nr+1} \cdot \frac{nar+1}{nar},$$

avremo

$$Q_n = \frac{nr}{nr+1}\left(1+\frac{1}{nar}\right)\left(1+\frac{1}{(na+1)\,r}\right) \cdots \left(1+\frac{1}{(na+a-1)\,r}\right)$$

$$< \frac{nr}{nr+1}\left(1+\frac{1}{nar}\right)\left(1+\frac{1}{nar+1}\right) \cdots \left(1+\frac{1}{nar+a-1}\right),$$

ovvero

$$Q_n < 1.$$

Da ciò che precede, segue

$$a\, Q_0\, Q_1 \ldots Q_n > \sqrt[r]{a} > P_0\, P_1 \ldots P_n$$

Se osserviamo che

$$\frac{P_s}{Q_s} = \frac{sar+a}{sar+1} \cdot \frac{(s+1)ar+1}{(s+1)ar+a},$$

vedremo che l'errore che si commette facendo

$$\sqrt[r]{a} = a\, Q_0 Q_1 \ldots Q_n,$$

è minore della differenza

$$a\, Q_0 Q_1 \ldots Q_n - P_0 P_1 \ldots P_n$$

$$= a\, Q_0 Q_1 \ldots Q_n \left(1 - \frac{1}{a} \frac{P_0}{Q_0} \frac{P_1}{Q_1} \cdots \frac{P_n}{Q_n}\right)$$

$$= a_0 Q_0 Q_1 \ldots Q_n \frac{a-1}{(n+1)ar+a}. \text{ (}^1\text{)}$$

Trasformazione dei prodotti infiniti in serie e viceversa.

261. L'identità

$$\frac{v_1}{1} \cdot \frac{v_1+v_2}{v_1} \cdot \frac{v_1+v_2+v_3}{v_1+v_2} \cdots \frac{v_1+v_2+\cdots+v_n}{v_1+v_2+\cdots+v_{n-1}}$$

$$= v_1 + v_2 + \cdots + v_n,$$

che sussiste per qualunque valore di n, può servire utilmente per convertire i prodotti infiniti in serie e viceversa.

Questa identità si può trasformare in altre che a seconda dei casi possono riuscire di più facile applicazione.

Se facciamo

$$\frac{v_1}{1} = u_1, \quad \frac{v_1+v_2}{v_1} = u_2, \quad \frac{v_1+v_2+v_3}{v_1+v_2} = u_3 \ldots,$$

---

[1] *Bulletins de l'Académie de Bruxelles*. Séance du 2 juin, 1849.

avremo la nuova identità

$$(1)\quad \begin{cases} u_1 u_2 u_3 \ldots u_n = u_1 + u_1(u_2 - 1) + u_1 u_2 (u_3 - 1) + \cdots \\ \qquad + u_1 u_2 \ldots u_{n-1}(u_n - 1). \end{cases}$$

Parimente ponendo

$$v_1 = 1\,,\quad v_2 = \frac{\alpha_1}{1-\alpha_1}\,,\quad v_3 = \frac{\alpha_2}{(1-\alpha_1)(1-\alpha_2)}\quad \ldots\ldots,$$

troveremo

$$\frac{1}{(1-\alpha_1)(1-\alpha_2)\ldots(1-\alpha_n)} = 1 + \frac{\alpha_1}{1-\alpha_1} + \frac{\alpha_2}{(1-\alpha_1)(1-\alpha_2)} + \cdots + \frac{\alpha_n}{(1-\alpha_1)\ldots(1-\alpha_n)};$$

la quale, sostituendo $\frac{\alpha_1}{\beta_1}$ per α_1, $\frac{\alpha_2}{\beta_2}$ per α_2 ec., diventa

$$(2)\quad \begin{cases} \dfrac{\beta_1}{\beta_1-\alpha_1}\cdot\dfrac{\beta_2}{\beta_2-\alpha_2}\cdots\dfrac{\beta_n}{\beta_n-\alpha_n} \\ = 1 + \dfrac{\alpha_1}{\beta_1-\alpha_1} + \dfrac{\alpha_2\beta_1}{(\beta_1-\alpha_1)(\beta_2-\alpha_2)} \\ \qquad + \dfrac{\alpha_3\beta_1\beta_2}{(\beta_1-\alpha_1)(\beta_2-\alpha_2)(\beta_3-\alpha_3)} \\ \qquad + \cdots \\ \qquad + \dfrac{\alpha_n\beta_1\beta_2\ldots\beta_{n-1}}{(\beta_1-\alpha_1)\ldots(\beta_n-\alpha_n)}. \end{cases}$$

ESEMPII. 1°. Facendo $u_n = 1 - \frac{1}{n+1}$, troveremo

$$u_1 u_2 \ldots u_{n-1}(u_n - 1) = -\frac{1}{n(n+1)},$$

e la formola (1) darà

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2.3}-\frac{1}{3.4}-\cdots-\frac{1}{n(n+1)}.$$

Ma il primo membro ha per limite 0; dunque

$$\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\cdots=1,$$

come già sapevamo (78).

2°. Nell'identità (1) poniamo

$$u_1 u_2 \ldots u_{n-1}(u_n-1)=-\frac{\lambda^2(1^2-\lambda^2)(2^2-\lambda^2)\ldots((n-2)^2-\lambda^2)}{1^2\ 2^2.3^2\ldots(n-1)^2},$$

troveremo

$$u_n=1-\frac{\lambda^2}{(n-1)^2},$$

e per conseguenza

$$\left(1-\frac{\lambda^2}{1^2}\right)\left(1-\frac{\lambda^2}{2^2}\right)\ldots\left(1-\frac{\lambda^2}{(n-1)^2}\right)$$

$$=1-\frac{\lambda^2}{1^2}-\frac{\lambda^2(1-\lambda^2)}{1^2.2^2}-\cdots-\frac{\lambda^2(1^2-\lambda^2)\ldots((n-2)^2-\lambda^2)}{1^2.2^2\ldots(n-1)^2}.$$

Ma il primo membro ha per limite una quantità finita diversa da zero; dunque lo stesso si verifica pel secondo membro.

3°. Se nella formola (2) facciamo

$$\alpha_n=x^2-1,\quad \beta_1=3,\quad \beta_2=15,\quad \beta_3=35,\ \text{ec.}$$

otterremo [1]

$$\prod_1^\infty \frac{4n^2-1}{4n^2-x^2}=1+\frac{x^2-1}{4-x^2}+\frac{3(x^2-1)}{(4-x^2)(16-x^2)}$$
$$+\frac{3.15(x^2-1)}{(4-x^2)(16-x^2)(36-x^2)}$$
$$+\cdots\cdots$$

---

[1] Il simbolo Π posto innanzi ad una funzione, indica un prodotto; così si scrive

$$\prod_{n=1}^{n=m} f(n)=f(1)f(2)\ldots f(m).$$

4°. Ponendo $\alpha_n = x^2$, $\beta_n = (2n-1)^2$, la formola (2) ci darà

$$\prod_1^\infty \frac{(2n-1)^2}{(2n-1)^2 - x^2}$$

$$= 1 + \frac{x^2}{1^2 - x^2} + \frac{x^2}{(1^2-x^2)(3^2-x^2)} + \frac{3^2 . x^2}{(1^2-x^2)(3^2-x^2)(5^2-x^2)} + \cdots$$

262. I prodotti infiniti della forma

$$(1+\alpha_1 z)(1+\alpha_2 z)(1+\alpha_3 z)\ldots,$$

si riducono facilmente in serie, e danno luogo a considerazioni interessanti. Se infatti indichiamo con

$$1 + C_1 z + C_2 z^2 + C_3 z^3 + \cdots,$$

la serie corrispondente, sarà C_n la somma delle combinazioni senza ripetizione della classe n^{esima} degli elementi

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots.$$

Se poniamo $\alpha_n = x^n$, C_n rappresenterà la somma delle combinazioni della classe n^{esima} degli elementi x, x^2, $x^3 \ldots$; ed è manifesto che in C_n la quantità x^m si troverà ripetuta tante volte quante sono le maniere di formare il numero m mediante la somma di n numeri della serie 1, 2, 3, 4 .... Per trovare il valore delle C sostituiamo nell'eguaglianza

$$(1+xz)(1+x^2 z)\ldots = 1 + C_1 z + C_2 z^2 \ldots,$$

$$\prod_1^\infty (1+x^n z) = \sum_0^\infty C_n z^n,$$

xz invece di z, avremo

$$(1+x^2 z)(1+x^3 z)\ldots = 1 + C_1 xz + C_2 x^2 z^2 \ldots,$$

da cui

$$\prod_1^\infty (1+x^n z) = (1+xz)(1 + C_1 xz + C_2 x^2 z^2 + \cdots)$$

$$= 1 + (C_1 x + x)z + (C_2 x^2 + C_1 x^2) z^2 + \cdots + (C_n x^n + C_{n-1} x^n) z^n + \cdots$$

$$= 1 + C_1 z + C_2 z^2 + \cdots + C_n z^n + \cdots;$$

per conseguenza

$$C_n = (C_n + C_{n-1})\, x^n ,$$

ovvero

$$C_n = C_{n-1}\, \frac{x^n}{1 - x^n}.$$

Se in questa formola sostituiamo successivamente $n-1, n-2 \dots 3, 2$ invece di n e facciamo il prodotto dell' equazioni che ne risultano, troveremo

$$C_n = \frac{x^{\frac{n(n+1)}{2}}}{(1-x)(1-x^2)\dots(1-x^n)},$$

poichè $C_1 = \dfrac{x}{1-x}$.

Laonde avremo

$$\prod_1^n (1 + x^n z) = \sum_0^\infty \frac{x^{\frac{n(n+1)}{2}}}{(1-x)(1-x^2)\dots(1-x^n)}\, z^n ,$$

formola dovuta ad Eulero.

263. Se indichiamo con N il coefficiente di $x^m z^n$ nel secondo membro di questa formola, abbiamo già avvertito che N indica in quanti modi il numero m può esser formato dalla somma di n numeri della serie $1, 2, 3, 4 \dots$ Per trovare il valore di N bisogna quindi sviluppare in serie l' espressione

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)\dots(1-x^n)};$$

ora è utile osservare che i coefficienti di questa serie hanno una relazione semplicissima coi numeri figurati, in guisa che conosciuti questi ultimi, i primi se ne possono dedurre agevolmente. Consideriamo per es.: il caso di $n = 4$, e facciamo

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$

Indicando con b_s una quantità determinata dalla relazione

$$b_s = a_s + a_{s-1} + a_{s-2} + a_{s-3}\,,$$

è facile vedere che avremo

$$\frac{1+x+x^2+x^3}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)}$$

$$=\frac{1}{(1-x)^2(1-x^2)(1-x^3)} = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots$$

Se poniamo

$$c_s = b_s + b_{s-1} + b_{s-2}\,,$$

otterremo parimente

$$\frac{1+x+x^2}{(1-x)^2(1-x^2)(1-x^3)} = \frac{1}{(1-x)^4(1+x)} = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots\,;$$

e finalmente ponendo

$$d_s = c_s + c_{s-1}\,,$$

troveremo

$$\frac{1}{(1-x)^4} = d_0 + d_1 x + d_2 x^2 + \cdots$$

Se quindi scriviamo le quattro serie

$$d_0\,,\ d_1\,,\ d_2\,,\ldots d_s\,,\ldots\,,$$

$$c_0\,,\ c_1\,,\ c_2\,,\ldots c_s\,,\ldots\,,$$

$$b_0\,,\ b_1\,,\ b_2\,,\ldots b_s\,,\ldots\,,$$

$$a_0\,,\ a_1\,,\ a_2\,,\ldots a_s\,,\ldots\,,$$

la prima delle quali è formata dai numeri figurati di terzo ordine, vedremo che per ottenere il termine c_s della seconda, bisogna sottrarre dal termine corrispondente d_s della prima il termine che precede c_s; per ottenere il termine b_s della terza serie, bisogna

sottrarre dal termine corrispondente c_4 della seconda i due termini che precedono b_4; finalmente per avere il termine a_4 della quarta serie si deve sottrarre dal termine corrispondente b_4 della terza i tre termini che precedono a_4. Nel caso generale bisognerà quindi formare n serie, la prima delle quali indicherà la serie dei numeri figurati di ordine $(n-1)^{esimo}$ e l'ultima la serie dei coefficienti che si cerca; il passaggio della prima all'ultima si fa nel modo che abbiamo indicato. Nell'ipotesi di $n=4$, i numeri figurati di terzo ordine essendo

$$1,\ 4,\ 10,\ 20,\ 35,\ 56,\ 84,\ 120,\ 165\ldots,$$

avremo

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)}$$
$$=1+x+2x^2+3x^3+5x^4+6x^5+9x^6+11x^7+15x^8+\cdots$$

Moltiplicando questa serie per $x^{\frac{n(n+1)}{2}}=x^{10}$, troveremo 15 per coefficiente di $x^{18}z^4$. Dunque 18 si può formare in 15 modi dalla somma di 4 fra i numeri 1, 2, 3, 4....

264. Se nella formola di Eulero facciamo $z=1$ e ordiniamo il secondo membro secondo le potenze di x, è manifesto che il coefficiente di x^m indica in quanti modi m risulta dalla somma dei numeri 1, 2, 3, 4 .... Così per vedere in quanti modi può formarsi il numero 8, basta fare la somma dei coefficienti di x^8 nell'espressioni

$$\frac{x}{1-x},\quad \frac{x^3}{(1-x)(1-x^2)},\quad \frac{x^6}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)};$$

la quale somma è 6; dunque 8 si può ottenere in 6 modi dalla somma dei numeri naturali.

In generale per vedere in quanti modi un numero può risultare dalla somma di più numeri interi $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ldots$ basta convertire in serie il prodotto

$$(1+x^{\alpha_1}z)(1+x^{\alpha_2}z)(1+x^{\alpha_3}z)\ldots.$$

Se indichiamo con $\sum C_n\, z^n$ questa serie, è chiaro che il

coefficiente di $x^m z^n$ in $C_n z^n$, indicherà in quanti modi m può ottenersi dalla somma di n fra i numeri $\alpha_1, \alpha_2, \ldots.$

265. Il prodotto

$$\frac{1}{(1-x^{\alpha_1}z)(1-x^{\alpha_2}z)(1-x^{\alpha_3}z)\ldots},$$

serve per determinare in quanti modi un dato numero può risultare dalla somma di numeri uguali o disuguali.

Se indichiamo con

$$1+P_1 z+P_2 z^2+\cdots,$$

la serie corrispondente e se osserviamo che

$$\frac{1}{1-x^{\alpha_1}z}=\sum_{y_1=0}^{y_1=\infty} x^{\alpha_1 y_1} z^{y_1},$$

$$\frac{1}{1-x^{\alpha_2}z}=\sum_{y_2=0}^{y_2=\infty} x^{\alpha_2 y_2} z^{y_2},$$

$$\frac{1}{1-x^{\alpha_3}z}=\sum_{y_3=0}^{y_3=\infty} x^{\alpha_3 y_3} z^{y_3},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

vedremo che

$$P_m z^m=\sum x^{\alpha_1 y_1+\alpha_2 y_2+\alpha_3 y_3+\cdots} z^{y_1+y_2+y_3\cdots},$$

ove il segno $\sum$ si estende a tutti i termini pei quali si ha

$$y_1+y_2+y_3+\cdots=m.$$

Dunque P_m rappresenta la somma delle potenze di x che hanno per esponenti le somme di m termini uguali e disuguali della serie

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots.$$

Se riuniamo tutti i termini che hanno n per esponente della x e indichiamo con N il coefficiente corrispondente di $x^n z^m$, N rappresenterà in quanti modi il numero n può essere formato

dalla somma di m termini uguali o disuguali delle serie $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$; o in altre parole N sarà il numero delle soluzioni intere e positive dell' equazioni

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \alpha_3 y_3 + \cdots = n,$$

$$y_1 + y_2 + y_3 + \cdots = m.$$

266. Se consideriamo un caso particolare del precedente, cioè

$$\frac{1}{(1-xz)(1-x^2z)(1-x^3z)\ldots.}, \tag{3}$$

il coefficiente N del termine $N\,x^n\,z^m$ rappresenterà evidentemente in quanti modi il numero n può decomporsi in m parti eguali o disuguali. Se nel denominatore vi fosse contenuto anche il fattore $1-z$, la serie dei numeri comincerebbe con 0.

Indicando con

$$1 + P_1 z + P_2 z^2 + \cdots,$$

la serie corrispondente al prodotto infinito (3), le P si possono determinare come nel caso generale; ma si può anche procedere nel seguente modo

Mutando in (3) z in $x\,z$ e moltiplicando il risultato per $\frac{1}{1-xz}$, avremo

$$(1-xz)(1 + P_1 z + P_2 z^2 + \cdots + P_m z^m + \cdots)$$
$$= 1 + P_1 x z + P_2 x^2 z^2 + \cdots + P_m x^m z^m + \cdots.$$

da cui

$$P_m = P_{m-1} \frac{x}{1-x^m},$$

e per conseguenza

$$P_m = \frac{x^m}{(1-x)(1-x^2)\ldots.(1-x^m)}.$$

In guisa che

$$\prod_1^{m} \frac{1}{(1-x^m z)} = \sum_{m=0}^{m=\infty} \frac{x^m z^m}{(1-x)(1-x^2)\dots(1-x^m)},$$

altra formola di Eulero.

Osserviamo altresì che nella serie corrispondente al prodotto

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\dots},$$

il coefficiente di x^n indica in quanti modi il numero n può risultare dall'addizione di numeri interi uguali o disuguali.

Prodotti infiniti per le serie di Heine e di Gauss.

267. Le serie di Heine e di Gauss si riducono facilmente in prodotti infiniti mediante le formole che abbiamo dato nel Capitolo 10°; e queste trasformazioni sono di grande rilievo, come quelle che racchiudono le trasformazioni in prodotti infiniti d'innumerevoli serie.

Una prima formola di trasformazione si ottiene dall'equazione (247)

$$\varphi(\alpha, \beta, \beta, q, x) = \frac{1-q^\alpha x}{1-x} \varphi(\alpha, \beta, \beta, q, q x)$$

sostituendo per x successivamente $q x$, $q^2 x$, $q^3 x$ ec., e moltiplicando insieme l'equazioni che ne risultano, in tal guisa si trova

$$(a) \left\{ \begin{aligned} & \varphi(\alpha, \beta, \beta, q, x) \\ & = 1 + \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{(1-q^\alpha)(1-q^{\alpha+1})\dots(1-q^{\alpha+n-1})}{(1-q)(1-q^2)\dots(1-q^n)} x^n = \prod_{n=0}^{n=\infty} \left(\frac{1-q^{\alpha+n} x}{1-q^n x} \right), \end{aligned} \right.$$

poichè la funzione $\varphi(\alpha, \beta, \beta, q, q^n . x)$ è uguale ad 1 per $n = \infty$.

Da questa formola si deducono le trasformazioni in prodotti infiniti delle seguenti serie

$$\varphi(-m, \beta, \beta, q, -q^m x)$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{(1-q^m)(1-q^{m-1})\dots(1-q^{m-n+1})}{(1-q)(1-q^2)\dots(1-q^n)} q^{\frac{n(n-1)}{2}} x^n$$

$$= \prod_{n=0}^{n=\infty} \left(\frac{1+q^n x}{1+q^{m+n} x}\right),$$

$$\varphi(-k, \beta, \beta, q, -q^k x)$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{q^{\frac{n(n-1)}{2}} x^n}{(1-q)(1-q^2)\dots(1-q^n)} = \prod_{n=0}^{n=\infty} (1+q^n x),$$

$$\varphi(k, \beta, \beta, q, -x)$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{n=\infty} (-1)^n \frac{x^n}{(1-q)(1-q^2)\dots(1-q^n)} = \prod_{n=0}^{n=\infty} \left(\frac{1}{1+q^n x}\right),$$

ove k indica un numero infinitamente grande.

Il confronto fra queste equazioni conduce alle relazioni notevoli.

$$\varphi(-k, \beta, \beta, q, -q^k x) = \frac{1}{\varphi(k, \beta, \beta, q, -x)},$$

$$\varphi(-m, \beta, \beta, q, -q^m x) = \varphi(-k, \beta, \beta, q, -q^k x)\varphi(k, \beta, \beta, q, -q^m x).$$

268. Dall'equazione (a) possiamo dedurre una formola trovata per altra via da Iacobi. Facciamo in essa $x = z$, $q^\alpha = v$, $q = x$, troveremo

$$1 + \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{(1-v)(1-vx)\dots(1-vx^{n-1})}{(1-x)(1-x^2)\dots(1-x^n)} z^n = \prod_{n=0}^{n=\infty} \left(\frac{1-x^n v z}{1-x^n z}\right):$$

se quindi indichiamo con v_n il coefficiente di z^n nella serie del primo membro e con w_n ciò che diventa v_n sostituendo w invece di v, avremo

$$\frac{1 + w_1 z + w_2 z^2 + \dots}{1 + v_1 z + v_2 z^2 + \dots} = \prod_{n=0}^{n=\infty} \left(\frac{1-x^n w z}{1-x^n v z}\right).$$

Nella medesima formola (a) facendo $x = v\,z,\, q = x,\, q^{\alpha} = \frac{w}{v}$, troveremo

$$1 + \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(v-w)(v-x\,w)\ldots(v-x^{n-1}\,w)}{(1-x)(1-x^2)\ldots(1-x^n)} z^n = \prod_{n=0}^{n=\infty} \left(\frac{1-x^n\,w\,z}{1-x^n\,v\,z}\right),$$

in guisa che, avremo

$$\frac{1+w_1\,z+w_2\,z^2+\cdots}{1+v_1\,z+v_2\,z^2+\cdots} = 1 + \frac{v-w}{1-x} z + \frac{(v-w)\,(v-x\,w)}{(1-x)\,(1-x^2)} z^2 + \cdots :$$

ove si vede che il secondo membro è una serie della stessa forma delle due serie del primo membro; infatti indicando con $[w, v]$ le serie del secondo membro, l'ultima eguaglianza può scriversi

$$\frac{[w, 1]}{[v, 1]} = [w, v].$$

Da questa formola si deducono varie conseguenze interessanti, come può vedersi nella Memoria di Iacobi, *Verallgemeinerung der Binomialreihe*, *Giornale di Crelle*, Vol. 32.

269. Un'altra serie di prodotti infiniti si deduce dall'equazione (247)

$$\varphi(\alpha, \beta, \gamma, q, q^{\gamma-\alpha-\beta}) = \frac{1-q^{\gamma-\beta}}{1-q^{\gamma}}\, \varphi(\alpha+1, \beta, \gamma+1, q, q^{\gamma-\alpha-\beta}).$$

Infatti se sostituiamo successivamente $\alpha+1, \alpha+2 \ldots \alpha+n-1$ per α, $\gamma+1, \gamma+2 \ldots \gamma+n-1$ per γ, e moltiplichiamo fra loro l'equazioni che ne risultano, troveremo

$$\varphi(\alpha\, \beta, \gamma, q, q^{\gamma-\alpha-\beta})$$

$$= \frac{(1-q^{\gamma-\beta})(1-q^{\gamma+1-\beta})\ldots(1-q^{\gamma+n-1-\beta})}{(1-q^{\gamma})(1-q^{\gamma+1})\ldots(1-q^{\gamma+n-1})}\, \varphi(\alpha+n, \beta, \gamma+n, q, q^{\gamma-\alpha-\beta}).$$

Se adesso facciamo crescere n indefinitamente, $\alpha+n$ e $\gamma+n$ di-

vengono eguali, e la funzione $\varphi(\alpha+n,\ \beta,\ \gamma+n,\ q,\ q^{\gamma-\alpha-\beta})$ si riduce a

$$\varphi(\beta,1,1,q,q^{\gamma-\alpha-\beta}) = \prod_{n=0}^{n=\infty}\left[\frac{1-q^{\gamma+n-\alpha}}{1-q^{\gamma+n-\alpha-\beta}}\right];$$

quindi avremo

$$(b)\quad \varphi(\alpha,\beta,\gamma,q,q^{\gamma-\alpha-\beta}) = \prod_{n=0}^{n=\infty}\left[\frac{1-q^{\gamma+n-\alpha}}{1-q^{\gamma+n-\alpha-\beta}}\right]\prod_{n=0}^{n=\infty}\left[\frac{1-q^{\gamma+n-\beta}}{1-q^{\gamma+n}}\right].$$

Al secondo membro si può dare un'altra forma, introducendo una nuova funzione Ω, definita dall'equazione

$$\Omega(q,a) = \prod_{n=0}^{n=\infty}\left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q^{a+n+1}}\right);$$

allora avremo

$$(c)\quad \varphi(\alpha,\beta,\gamma,q,q^{\gamma-\alpha-\beta}) = \frac{\Omega(q,\gamma-1)\,\Omega(q,\gamma-\alpha-\beta-1)}{\Omega(q,\gamma-\alpha-1)\,\Omega(q,\gamma-\beta-1)}.$$

La funzione Ω soddisfa alla relazione

$$\Omega(a) = (1-q^a)\,\Omega(a-1),$$

per qualunque valore di a; e alla formola

$$\Omega(a) = (1-q)(1-q^2)\dots(1-q^a),$$

se a è un numero intero.

Osserviamo che si ha

$$\Omega(q,a) = 1 + \sum_{n=1}^{n=\infty}(-1)^n\frac{(1-q^a)(1-q^{a-1})\dots(1-q^{a-n+1})}{(1-q)(1-q^2)\dots(1-q^n)}\,q^{\frac{n(n+1)}{2}}.$$

270. Per dare un'applicazione della formola (c), facciamo

$$\alpha = \frac{1}{2}+\frac{xi}{lq},\quad \beta = \frac{1}{2}-\frac{xi}{lq},\quad \gamma = \frac{3}{2},$$

è in luogo di q sostituiamo q^2; avremo

$$\varphi\left(\frac{1}{2}+\frac{xi}{lq},\ \frac{1}{2}-\frac{xi}{lq},\ \frac{3}{2},\ q^2, q\right)=\frac{\Omega\left(q^2,\frac{1}{2}\right)\Omega\left(q^2,-\frac{1}{2}\right)}{\Omega\left(q^2,\frac{xi}{lq}\right)\Omega\left(q^2,-\frac{xi}{lq}\right)}\,.$$

Ma poichè $e^{2xi}+e^{-2xi}=2\cos 2x,\ q^{\frac{2xi}{lq}}=e^{2xi}$, si ha

$$\varphi\left(\frac{1}{2}+\frac{xi}{lq},\ \frac{1}{2}-\frac{xi}{lq},\ \frac{3}{2}, q^2, q\right)$$

$$=1+\frac{1-2q\cos 2x+q^2}{(1-q^2)(1-q^3)}q+\frac{(1-2q\cos 2x+q^2)(1-2q^3\cos 2x+q^6)}{(1-q^2)(1-q^3)(1-q^4)(1-q^5)}q^2+\ldots\ ;$$

$$\Omega\left(q^2,\frac{1}{2}\right)\Omega\left(q^2,-\frac{1}{2}\right)=(1-q)\left[\frac{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)\ldots}{(1-q)(1-q^3)(1-q^5)\ldots}\right]^2,$$

$$\Omega\left(q^2,\frac{xi}{lq}\right)=\frac{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)\ldots .}{(1-q^2e^{2xi})(1-q^4e^{2xi})\ldots .}\,,$$

$$\Omega\left(q^2,-\frac{xi}{lq}\right)=\frac{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)\ldots .}{(1-q^2e^{-2xi})(1-q^4e^{-2xi})\ldots .}\ ;$$

in guisa che troveremo

$$\frac{1}{1-q}+\frac{(1-2q\cos 2x+q^2)}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)}q+\frac{(1-2q\cos 2x+q^2)(1-2q^3\cos 2x+q^6)}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)(1-q^4)(1-q^5)}q^2+\ldots$$

$$=\frac{(1-2q^2\cos 2x+q^4)(1-2q^4\cos 2x+q^8)\ldots .}{[(1-q)(1-q^3)(1-q^5)\ldots .]^2}\,.$$

Parimente si ha

$$\varphi\left(\frac{1}{2}+\frac{xi}{lq},\frac{1}{2}-\frac{xi}{lq}, 2, q^2, q^2\right)=\frac{\Omega(q^2,1)\,\Omega(q^2,0)}{\Omega\left(q^2,\frac{1}{2}-\frac{xi}{lq}\right)\Omega\left(q^2,\frac{1}{2}+\frac{xi}{lq}\right)}\,,$$

e poichè

$$\Omega(q^2, 1) = 1 - q^2,\ \Omega(q^2, 0) = 1\ .$$

$$\Omega\left(q^2, \frac{1}{2} - \frac{xi}{l\,q}\right) = \frac{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)\dots.}{(1-q^3 e^{2xi})(1-q^5 e^{2xi})\dots.},$$

$$\Omega\left(q^2, \frac{1}{2} + \frac{xi}{l\,q}\right) = \frac{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)\dots}{(1-q^3 e^{-2xi})(1-q^5 e^{-2xi})\dots.}:$$

troveremo

$$1 + \frac{(1-2q\cos 2x+q^2)}{(1-q^2)(1-q^4)} q^2 + \frac{(1-2q\cos 2x+q^2)(1-2q^3\cos 2x+q^6)}{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^4)(1-q^6)} q^4 + \cdots$$

$$= (1-q^2)\frac{(1-2q^3\cos 2x+q^6)(1-2q^5\cos 2x+q^{10})\dots.}{[(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)\dots.]^2}\ \text{(1)}$$

271. Per trasformare in prodotto infinito la serie di Gauss, introduciamo una funzione $\psi(n, a)$ definita dalla relazione

$$\psi(n, a) = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots. n}{(a+1)(a+2)\dots.(a+n)} n^a,$$

ove n è un numero intero e positivo.

Affine di trovare il limite al quale tende questa funzione al crescere di n, osserviamo che si ha

$$\frac{\psi(n, a)}{\psi(n-1, a)} = \left(\frac{n}{n+a}\right)\left(\frac{n}{n-1}\right)^a = \left(1 - \frac{a}{n+a}\right)\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-a}$$

$$= \left(1 - \frac{a}{n} + \frac{a^2}{a^2} + \cdots\right)\left(1 + \frac{a}{n} + \frac{a(a+1)}{2n^2} + \dots.\right)$$

$$= 1 + \frac{a(a+1)}{2n^2} + \cdots;$$

---

(1) Per altre applicazioni alle serie ellittiche si può consultare la Memoria di Heine. Giova osservare che la funzione Ω ha una relazione semplicissima con la funzione *emiteta* considerata dal Prof. Betti nella sua *Teorica delle funzioni ellittiche*; infatti si ha

$$\Omega\left(q^2, \frac{\pi i z}{l\,q}\right) = \frac{\operatorname{sen} \pi z}{\pi\, \mathrm{et}\, z}.$$

quindi (pag. 271), $\psi(n, a)$ è una funzione che al crescere di n converge verso un limite finito e determinato. Questo limite lo indicheremo con $\psi(a)$; cioè faremo

$$\psi(a) = \prod_1^\infty \left(\frac{n}{n+a}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)^a .$$

La funzione $\psi(a)$ soddisfa, per qualunque valore di a, alla relazione

$$\psi(a+1) = (a+1)\psi(a) ,$$

conseguenza evidente dell'eguaglianza

$$\psi(n, a+1) = \psi(a)\frac{n(a+1)}{n+a+1} ;$$

e alla formola

$$\psi(a) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots . a ,$$

se a è un numero intero e positivo.

Ciò posto, se nella formola (b) facciamo $q=1$, avremo

$$F(\alpha, \beta, \gamma, 1) = \frac{\prod_0^\infty (\gamma-\alpha+n) \prod_0^\infty (\gamma-\beta+n)}{\prod_0^\infty (\gamma+n) \prod_0^\infty (\gamma-\alpha-\beta+n)} .$$

Ora si ha

$$\prod_0^\infty (\gamma-\alpha+n) = \frac{1}{\psi(\gamma-\alpha-1)} \prod_0^\infty (n+1)\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{\gamma-\alpha-1} ,$$

$$\prod_0^\infty (\gamma-\beta+n) = \frac{1}{\psi(\gamma-\beta-1)} \prod_0^\infty (n+1)\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{\gamma-\beta-1} ,$$

$$\prod_0^\infty (\gamma+n) = \frac{1}{\psi(\gamma-1)} \prod_0^\infty (n+1)\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{\gamma-1} ,$$

$$\prod_0^\infty (\gamma-\alpha-\beta+n) = \frac{1}{\psi(\gamma-\alpha-\beta-1)} \prod_0^\infty (n+1)\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{\gamma-\alpha-\beta-1} ;$$

quindi sostituendo troveremo

$$F(\alpha, \beta, \gamma, 1) = \frac{\psi(\gamma-1)\psi(\gamma-\alpha-\beta-1)}{\psi(\gamma-\alpha-1)\psi(\gamma-\beta-1)} .$$

Prodotti infiniti per le funzioni circolari ed iperboliche.

272. Dalle formole precedenti si ricava un metodo semplicissimo per ottenere i prodotti infiniti corrispondenti alle funzioni circolari. Infatti osserviamo che si ha

$$x = sen\,x . F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, sen^2 x\right) ;$$

nella quale facendo $x = \frac{\pi}{2}$, troveremo

$$\frac{\pi}{2} = F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 1\right) = \frac{\psi\left(\frac{1}{2}\right)\psi\left(-\frac{1}{2}\right)}{\psi(0)\,\psi(0)} .$$

Ma si ha

$$\psi\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\psi\left(-\frac{1}{2}\right) ,$$

talchè

$$\pi = \left[\psi\left(-\frac{1}{2}\right)\right]^2 ,$$

da cui

$$\psi\left(-\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} , \quad \psi\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi} .$$

Se osserviamo che

$$\psi\left(\frac{1}{2}\right) = \prod_1^\infty \left(\frac{2n}{2n+1}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}} ,$$

$$\psi\left(-\frac{1}{2}\right) = \prod_1^\infty \left(\frac{2n}{2n-1}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-\frac{1}{2}} ,$$

avremo

$$\frac{\pi}{2} = \prod_{1}^{\infty} \frac{4n^2}{4n^2-1},$$

lo che dà π in prodotto infinito.

Inoltre si ha

$$sen\, m\, x = m\, sen\, x.\, F\left(\frac{m}{2}+\frac{1}{2}, -\frac{m}{2}+\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, sen^2 x\right),$$

da cui

$$sen\frac{m\pi}{2} = m F\left(\frac{m}{2}+\frac{1}{2}, -\frac{m}{2}+\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 1\right) = \frac{m\,\psi\left(\frac{1}{2}\right)\psi\left(-\frac{1}{2}\right)}{\psi\left(-\frac{m}{2}\right)\psi\left(\frac{m}{2}\right)},$$

e per conseguenza

$$\psi\left(\frac{m}{2}\right)\psi\left(-\frac{m}{2}\right) = \frac{\frac{1}{2}m\pi}{sen\frac{m\pi}{2}}.$$

Se facciamo $m = 2\lambda$, avremo

$$\frac{\lambda\pi}{sen\,\lambda\pi} = \psi(-\lambda)\,\psi(+\lambda) = lim\frac{(1\,.\,2\,.\,3\,.\,\ldots\,n)^2}{(1-\lambda^2)(2^2-\lambda^2)(3^2-\lambda^2)\ldots(n^2-\lambda^2)},$$

da cui

$$sen\,\lambda\pi = \lambda\pi(1-\lambda^2)\left(1-\frac{\lambda^2}{2^2}\right)\left(1-\frac{\lambda^2}{3^2}\right)\ldots$$

Ponendo $\lambda = \frac{x}{\pi}$, otterremo

$$(1)\qquad sen\, x = x\prod_{1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right).$$

Per ottenere il prodotto infinito corrispondente al coseno, so stituiremo nell'ultima formola $\frac{x}{2}$ per x, ed avremo

$$sen\frac{x}{2}=\frac{x}{2}\prod_1^\infty\left(1-\frac{x^2}{(2n)^2\pi^2}\right).$$

Dividendo la prima formola per la seconda, e osservando che $\cos\frac{x}{2}=\frac{sen\,x}{2\,sen\frac{x}{2}}$, si trova

$$\cos\frac{x}{2}=\prod_1^\infty\left(1-\frac{x^2}{(2n-1)^2\pi^2}\right),$$

da cui

$$(2)\qquad \cos x=\prod_1^\infty\left(1-\frac{4x^2}{(2n-1)^2\pi^2}\right).$$

Combinando fra loro l'equazioni (1) e (2) si ottengono i prodotti infiniti per le altre funzioni circolari, in guisa che avremo il seguente sistema di formole

$$sen\,\pi x=\pi x\prod_1^\infty\frac{n^2-x^2}{n^2}\,,\quad \cos\pi x=\prod_1^\infty\frac{(2n-1)^2-4x^2}{(2n-1)^2}\,,$$

$$sec\,\pi x=\prod_1^\infty\frac{(2n-1)^2}{(2n-1)^2-4x^2}\,,\quad cosec\,\pi x=\frac{1}{\pi x}\prod_1^\infty\frac{n^2}{n^2-x^2}\,,$$

$$tan\,\pi x=\pi x\prod_1^\infty\frac{n^2-x^2}{(2n-1)^2-4x^2}\left(\frac{2n-1}{n}\right)^2,$$

$$cot\,\pi x=\frac{1}{\pi x}\prod_1^\infty\frac{(2n-1)^2-4x^2}{n^2-x^2}\left(\frac{n}{2n-1}\right)^2.$$

273. I prodotti infiniti per le funzioni iperboliche si deducono immediatamente dalle formole (1) e (2). Infatti le serie corrispondenti a $sen\,x$ e a $\prod_1^\infty\left(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)$, sono convergenti in tutta l'estensione del piano e sono eguali per tutti i punti situati sopra una linea retta: quindi per un teorema già dimo-

strato (112), queste due serie, e per conseguenza le quantità $sen\, x$ e $\prod_1^\infty \left(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)$, dovranno essere eguali per tutta l'estensione del piano, cioè non solo pei valori reali di x, ma anche per qualunque valore complesso. Laonde l'eguaglianza (1) deve sussistere sostituendo $x\sqrt{-1}$ in luogo di x; ed allora avremo

$$senh\, x = x \prod_1^\infty \left(1+\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right).$$

Ragionando in un modo analogo sulla formola (2), troveremo

$$\cosh x = \prod_1^\infty \left(1+\frac{4n^2}{(2n-1)^2\pi^2}\right) \text{ (1)}.$$

Applicazione delle formole precedenti.

274. Le formole (1) e (2) conducono in modo semplice ed elegante a talune serie per le funzioni $\tan x, \cot x, \sec x, \cot x$ e a varie relazioni interessanti fra i coefficienti di queste serie, i numeri bernoulliani e le somme delle potenze reciproche dei nu-

---

(1) La teoria delle funzioni circolari ed iperboliche, che noi abbiamo dedotta analiticamente da quella delle serie, si potrebbe altresì ottenere per mezzo dei prodotti infiniti. Questa ricerca offre un utile esercizio ai giovani, i quali potranno consultare una Memoria di Schellbach inserita nel Vol. 48 del *Giornale di Crelle*, e la *Teorica delle funzioni ellittiche* del Prof Betti. Osserviamo ancora che confrontando le formole trovate nel n° 272 con quelle del n° 264, si hanno le relazioni notevoli

$$sen\, \lambda\pi = 1 - \frac{\lambda^2}{1^2} - \frac{\lambda^2(1^2-\lambda^2)}{1^2 \cdot 2^2} - \frac{\lambda^2(1^2-\lambda^2)(2^2-\lambda^2)}{1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2} - \dots,$$

$$\frac{x}{sen\,\frac{1}{2}\pi x} = 1 + \frac{x^2-1}{4-x^2} + \frac{3(x^2-1)}{(4-x^2)(16-x^2)} + \frac{3 \cdot 15(x^2-1)}{(4-x^2)(16-x^2)(36-x^2)} + \dots$$

$$\sec\frac{1}{2}\pi x = 1 + \frac{x^2}{1^2-x^2} + \frac{x^2}{(1^2-x^2)(3^2-x^2)} + \frac{3^2 \cdot x^2}{(1^2-x^2)(3^2-x^2)(5^2-x^2)} + \dots$$

meri interi, che completano ciò che abbiamo esposto nei Capitoli precedenti, e che per questa ragione ci sembra non dover passare sotto silenzio.

Cominciando dalla formola (1), prendiamo i logaritmi neperiani dei due membri, avremo

$$l\frac{\operatorname{sen} x}{x}=l\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)+l\left(1-\frac{x^2}{2^2\pi^2}\right)+l\left(1-\frac{x^2}{3^2\pi^2}\right)+\cdots :$$

se quindi supponiamo $x<\pi$, i termini del secondo membro saranno sviluppabili in serie convergenti, ed avremo

$$\begin{aligned} l\frac{\operatorname{sen} x}{x}=&-\frac{x^2}{\pi^2}-\frac{1}{2}\frac{x^4}{\pi^4}-\frac{1}{3}\frac{x^6}{\pi^6}-\cdots\\ &-\frac{1}{2^2}\frac{x^2}{\pi^2}-\frac{1}{2^4}\frac{1}{2}\frac{x^4}{\pi^4}-\frac{1}{2^6}\frac{1}{3}\frac{x^6}{\pi^6}-\cdots\\ &-\frac{1}{3^2}\frac{x^2}{\pi^2}-\frac{1}{3^4}\frac{1}{2}\frac{x^4}{\pi^4}-\frac{1}{3^6}\frac{1}{3}\frac{x^6}{\pi^6}-\cdots\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

Ma il secondo membro è una serie doppia convergente, quindi

$$\begin{aligned} l\frac{\operatorname{sen} x}{x}=&-\frac{x^2}{\pi^2}\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots\right)\\ &-\frac{1}{2}\frac{x^4}{\pi^4}\left(1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\cdots\right)\\ &-\frac{1}{3}\frac{x^6}{\pi^6}\left(1+\frac{1}{2^6}+\frac{1}{3^6}+\cdots\right)\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \end{aligned}$$

ovvero se facciamo

$$1+\frac{1}{2^{2n}}+\frac{1}{3^{2n}}+\cdots=S_{2n},$$

avremo

$$(3)\qquad l\frac{\operatorname{sen} x}{x}=-S_2\frac{x^2}{\pi^2}-\frac{S_4}{2}\frac{x^4}{\pi^4}-\frac{S_6}{3}\frac{x^6}{\pi^6}-\cdots$$

In un modo analogo si può procedere colla formola (2). Se infatti supponiamo $x < \frac{\pi}{2}$, avremo

$$l \cos x = l\left(1 - \frac{2^2 x^2}{\pi^2}\right) + l\left(1 - \frac{2^2 x^2}{3^2 \pi^2}\right) + l\left(1 - \frac{2^2 x^2}{5^2 \pi^2}\right) + \cdots$$

$$= -\frac{2^2 x^2}{\pi^2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{2^4 x^4}{\pi^4} - \frac{1}{3} \cdot \frac{2^6 x^6}{\pi^6} - \cdots$$

$$-\frac{2^2 x^2}{3^2 \pi^2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{2^4 x^4}{3^4 \pi^4} - \frac{1}{3} \cdot \frac{2^6 x^6}{3^6 \pi^6} - \cdots$$

$$-\frac{2^2 x^2}{5^2 \pi^2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{2^4 x^4}{5^4 \pi^4} - \frac{1}{3} \cdot \frac{2^6 x^6}{5^6 \pi^6} - \cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ,$$

ovvero

$$(4) \qquad l \cos x = -s_2 \frac{2^2 x^2}{\pi^2} - \frac{s_4}{2} \frac{2^4 x^4}{\pi^4} - \frac{s_6}{3} \frac{2^6 x^6}{\pi^6} - \cdots ,$$

essendo

$$s_{2n} = 1 + \frac{1}{3^{2n}} + \frac{1}{5^{2n}} + \frac{1}{7^{2n}} + \cdots$$

Questa eguaglianza si può scrivere sotto un'altra forma giovandosi della relazione

$$s_{2n} = \left(1 - \frac{1}{2^{2n}}\right) S_{2n}$$

Sostituendo infatti, troveremo

$$(5) \quad l \cos x = -\frac{(2^2-1) S_2}{\pi^2} x^2 - \frac{1}{2} \frac{(2^4-1) S_4}{\pi^4} x^4 - \frac{1}{3} \frac{(2^6-1) S_6}{\pi^6} x^6 \ldots$$

275. Dall'eguaglianze (3), (4) e (5), si possono dedurre delle formole per determinare le somme S e s. Così osservando che

$$l \frac{\operatorname{sen} x}{x} = l\left(1 - \frac{x^2}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4.5} - \cdots\right),$$

posto $x^2 = u$, troveremo

$$l\left(1-\frac{u}{1.2.3}+\frac{u^2}{1.2.3.4.5}-\cdots\right)$$

$$=-S_2\frac{u}{\pi^2}-\frac{S_4}{2}\frac{u^2}{\pi^4}-\frac{S_6}{3}\frac{u^3}{\pi^6}-\cdots,$$

ove si ha

$$\frac{u}{1.2.3}-\frac{u^2}{1.2.3.4.5}+\cdots<1,$$

nell'ipotesi di $u<\pi$, poichè $\frac{sen\ x}{x}<1$.

Ma dal n° 193 si ha

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} & l(1+A_1u+A_2u^2+\cdots)=a_1u+a_2u^2+\cdots, \\ & n a_n = n A_n - \sum_{h=1}^{h=n-1} h\, a_h A_{n-h} \\ & \quad = n\sum_{r=1}^{r=n}(-1)^{r-1}\frac{D_{n,r}}{r}; \end{aligned}\right.$$

e poichè nel caso presente

$$A_n=(-1)^n\frac{1}{\Pi(2n+1)},\quad a_n=-\frac{1}{n}\frac{S_{2n}}{\pi^{2n}},$$

avremo

$$(7)\quad \frac{S_{2n}}{\pi^{2n}}=(-1)^{n+1}\frac{n}{\Pi(2n+1)}+\sum_{h=1}^{h=n-1}(-1)^{n+1-h}\frac{S_{2h}}{\pi^{2h}}\frac{1}{\Pi(2n+1-2h)},$$

formola che determina S_{2n} in funzione di $S_{2n-2}, S_{2n-4}, \ldots S_2$.

Parimente si ha

$$(8)\quad -\frac{1}{n}\frac{S_{2n}}{\pi^{2n}}=\sum_{r=1}^{r=n}(-1)^{r-1}\frac{D_{n,r}}{r},$$

ove il simbolo D si riferisce agli elementi

$$-\frac{1}{6},\ \frac{1}{120},\ \ldots (-1)^n\frac{1}{\Pi(2n+1)}.$$

Così se facciamo successivamente $n=1$, $n=2$, avremo

$$-\frac{S_2}{\pi^2}=D_{1,1}=A_1=-\frac{1}{6},$$

$$-\frac{1}{2}\frac{S_4}{\pi^4}=D_{2,1}-\frac{1}{2}D_{2,2}=A_2-\frac{1}{2}A_1^2=\frac{1}{120}-\frac{1}{72}=-\frac{1}{180}:$$

talchè

$$S_2=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6},$$

$$S_4=1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\cdots=\frac{\pi^4}{90}.$$

Parimente dalla formola (4), ponendo $x^2=u$, e sostituendo per $\cos x$ la serie corrispondente, avremo

$$l\left[\Sigma(-1)^n\frac{u^n}{\Pi(2n)}\right]=-\Sigma\frac{1}{n}\frac{2^{2n}s_{2n}}{\pi^{2n}}u_n.$$

Quindi per la formola (6), osservando che

$$A_n=(-1)^n\frac{1}{\Pi(2n)},\ a_n=-\frac{1}{n}\frac{2^{2n}s_{2n}}{\pi^{2n}},$$

si ha

$$(9)\left\{\begin{aligned}\frac{2^{2n}s_{2n}}{\pi^{2n}}&=(-1)^{n+1}\frac{n}{\Pi(2n)}+\sum_{h=1}^{h=n-1}(-1)^{n-h+1}\frac{2^{2h}s_{2h}}{\pi^{2h}}\frac{1}{\Pi(2n-2h)}\\&=n\sum_{r=1}^{r=n}(-1)^r\frac{D_{n,r}}{r},\end{aligned}\right.$$

ove le disposizioni vanno prese rispetto agli elementi

$$-\frac{1}{2},\ \frac{1}{24},\ldots.(-1)^n\frac{1}{\Pi(2n)}.$$

Se poniamo

$$(10)\qquad \frac{S_{2n}}{2^{2n-1}\,\pi^{2n}} = \frac{B_{2n-1}}{1\,.\,2\,\ldots\,(2n)}\,,$$

le quantità B_1, B_3, B_5,.... sono i numeri di Bernouilli che abbiamo già incontrati nel n° 173.

Questa formola combinata colle formole (7), (8) e (9), darà altre quattro formole per la determinazione dei numeri bernoulliani. Così le formole (7) e (8), diventano

$$\frac{2^{2n-1}B_{2n-1}}{\Pi\,(2n)} = (-1)^{n+1}\frac{n}{\Pi(2n+1)} + \sum_{h=1}^{h=n-1}(-1)^{n-h+1}\frac{2^{2h-1}B_{2h-1}}{\Pi\,(2h)}\cdot\frac{1}{\Pi(2n+1-2h)}$$

$$= n\sum_{r=1}^{r=n}(-1)^r\frac{D_{n,r}}{r}\,.$$

276. Passiamo ora a cercare delle serie per le funzioni *tan*, *cot*, *sec* e *cosec*.

Se supponiamo che si abbia

$$0 < x < \pi,\ 0 < x+\delta < \pi\,,$$

ove δ è una quantità arbitrariamente piccola, avremo

$$l\,sen\,x = l\,x + \sum l\,\frac{n^2\,\pi^2 - x^2}{n^2\,\pi^2}\,,$$

$$l\,sen\,(x+\delta) = l\,(x+\delta) + \sum l\,\frac{n^2\,\pi^2 - (x+\delta)^2}{n^2\,\pi^2}\,,$$

da cui

$$l\,\frac{sen\,(x+\delta)}{sen\,x} = l\left(1+\frac{\delta}{x}\right) + \sum l\left(1 - \frac{2\delta\,x + \delta^2}{n^2\,\pi^2 - x^2}\right).$$

Ora sono facili a verificare le seguenti disuguaglianze

$$z > l\,(1+z) > z - \frac{1}{2}z^2\,,$$

$$z + \frac{1}{2}\,\frac{z^2}{1-z} > l\left(\frac{1}{1-z}\right) > z\,,$$

che sussistono per tutti i valori di z che soddisfano alle condizioni $0 < z < 1$.

Se quindi indichiamo con ρ e ρ_n due quantità positive minori di 1, potremo fare

$$l(1+z) = z - \frac{\rho}{2} z^2 ,$$

$$l(1-z) = -z - \frac{\rho_n}{2} \frac{z^2}{1-z} .$$

Ma si può sempre scegliere δ così piccola, che le due quantità $\frac{\delta}{x}$ e $\frac{2\delta x + \delta^2}{n^2\pi^2 - x^2}$ sieno minori di 1, in guisa che avremo

$$l\left(1 + \frac{\delta}{x}\right) = \frac{\delta}{x} - \frac{\rho}{2} \frac{\delta^2}{x^2} ,$$

$$l\left(1 - \frac{2\delta x + \delta^2}{n^2\pi^2 - x^2}\right) = -\frac{2\delta x + \delta^2}{n^2\pi^2 - x^2} - \frac{\rho_n}{2} \frac{(2\delta x + \delta^2)^2}{[n^2\pi^2 - x^2][n^2\pi^2 - (x+\delta)^2]} .$$

Laonde sostituendo, troveremo

$$l \frac{sen\,(x+\delta)}{sen\,x} = \frac{\delta}{x} - \frac{\rho}{2} \frac{\delta^2}{x^2}$$

$$-(2\delta x + \delta^2) \Sigma \frac{1}{n^2\pi^2 - x^2} - \frac{(2\delta x + \delta^2)^2}{2} \Sigma \frac{\rho_n}{[n^2\pi^2 - x^2][n^2\pi^2 - (x+\delta)^2]} .$$

Se applichiamo la regola data nel n° 119, si vede facilmente che le due serie

$$\Sigma \frac{1}{n^2\pi^2 - x^2} , \quad \Sigma \frac{\rho_n}{[n^2\pi^2 - x^2]\,[n^2\pi^2 - (x+\delta)^2]} ,$$

sono convergenti; talchè indicando la prima con P, la seconda con Q, avremo

$$\frac{1}{\delta} l \frac{sen\,(x+\delta)}{sen\,x} = \frac{1}{x} - 2\,P x - \delta \left[\frac{\rho}{2x^2} + P - \frac{(2x+\delta)^2}{2} Q\right] .$$

Per $\delta = 0$, il secondo membro si riduce a $\frac{1}{x} - 2\,P x$; ve-

diamo quale è il limite del primo membro che si presenta sotto la forma $\frac{0}{0}$. Facciamo

$$\frac{sen\,(x+\delta)}{sen\,x}=1+\varepsilon\,,$$

ove ε è una quantità positiva che converge a zero insieme a δ; avremo

$$\frac{1}{\delta}\,l\,\frac{sen\,(x+\delta)}{sen\,x}=l\,(1+\varepsilon)^{\frac{1}{\varepsilon}}\,\frac{\varepsilon}{\delta}=l\,(1+\varepsilon)^{\frac{1}{\varepsilon}}\,\frac{sen\,(x+\delta)-sen\,x}{\delta\,sen\,x}\,,$$

ovvero

$$\frac{1}{\delta}\,l\,\frac{sen\,(x+\delta)}{sen\,x}=l\,(1+\varepsilon)^{\frac{1}{\varepsilon}}\,\frac{2\cos\left(x+\frac{1}{2}\delta\right)sen\,\frac{1}{2}\,\delta}{\delta\,sen\,x}\,,$$

da cui

$$lim\left[\frac{1}{\delta}\,l\,\frac{sen\,(x+\delta)}{sen\,x}\right]=cot\,x.$$

Per conseguenza avremo

$$(a)\qquad cot\,x=\frac{1}{x}-\sum_{1}^{\infty}\frac{2x}{n^2\pi^2-x^2}\,.$$

Questa formola, cho abbiamo dimostrata vera per tutti i valori di x compresi fra 0 e π, sussiste per qualunque valore di x Infatti la serie del secondo membro gode tutte le proprietà di $cot\,x$. Così si vede che essa diventa infinita sostituendo per x tutti i multipli interi positivi e negativi di π. Inoltre indicandone con $f\,(x)$ la somma, si trova

$$\lim_{m=\infty}\left(\frac{1}{m}\,f\left(\frac{x}{m}\right)\right)=\frac{1}{x}\,.$$

Si ha pure

$$f(x)=\frac{1}{x}-\sum_{1}^{h}\left(\frac{1}{h\,\pi-x}-\frac{1}{h\,\pi+x}\right)-2x\sum_{h}^{\infty}\frac{1}{(k+1)^2\,n^2-x^2}\,,$$

da cui

$$f(\pi+x)=\frac{1}{\pi+x}+\frac{1}{x}+\frac{1}{2\pi+x}-\frac{1}{\pi-x}+\frac{1}{3\pi+x}-\frac{1}{2\pi-x}+\cdots$$

$$-\frac{1}{(n-2)\pi-x}+\frac{1}{n\pi+x}-\frac{1}{(n-1)\pi-x}+\frac{1}{(n+1)\pi+x}$$

$$-2(\pi+x)\sum_{n}^{\infty}\frac{1}{(k+1)^2 n^2-(\pi+x)^2}.$$

ovvero

$$f(\pi+x)-\frac{1}{n\pi+x}-\frac{1}{(n+1)\pi+2}+2(\pi+x)\sum_{n}^{\infty}\frac{1}{(k+1)^2n^2-(\pi+x)^2}$$

$$=\frac{1}{x}-\frac{2x}{\pi^2-x^2}-\frac{2x}{2^2\pi^2-x^2}-\cdots-\frac{2x}{(n-1)^2\pi^2-x^2}.$$

Se in questa formola facciamo crescere n indefinitamente, troveremo

$$f(\pi+x)=\frac{1}{x}-\Sigma\frac{2x}{n^2\pi^2-x^2}=f(x).$$

In un modo analogo si potrebbero dimostrare tutte le altre proprietà di $\cot x$: quindi l'equazione (a) ha luogo per qualunque valore di x. [1]

---

[1] La formola (a) si potrebbe ottenere semplicemente nel seguente modo. Facciamo

$$\cot\pi x=\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{A_n}{x-n},$$

ove A_n è un coefficiente indeterminato. Per trovare A_n basta evidentemente cercare il valore che prende l'espressione

$$(x-n)\cot\pi x=\frac{(x-n)\cos\pi(x-n)}{\operatorname{sen}\pi(x-n)},$$

per $x=n$; quindi si ha

$$A_n=\frac{1}{\pi};$$

talchè

$$\cot\pi x=\frac{1}{\pi}\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x-n}=\frac{1}{\pi x}-\frac{2x}{\pi}\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n^2-x^2}.$$

Trovata questa formola, bisognerebbe poi provare che il secondo mem-

La serie per *tan* x si deduce facilmente alla formola (a). Infatti si ha

$$cot\, x = \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x - n\pi}:$$

sostituendo $\frac{\pi}{2} - x$ in luogo di x, troveremo

$$tan\, x = \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{2}{\pi - 2x - 2n\pi},$$

ovvero

$$(b) \qquad tan\, x = 8x \prod_{1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2\pi^2 - 4x^2}.$$

Per trovare *cosec* x e *sec* x, osserviamo che si ha

$$cosec\, x = cot\, x + tan\, \frac{1}{2} x;$$

quindi

$$(c) \qquad cosec\, x = \frac{1}{x} + 2x \sum_{1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^2\pi^2 - x^2}.$$

Questa formola si può scrivere

$$cosec\, x = \frac{1}{x} + \left(\frac{1}{\pi - x} - \frac{1}{\pi + x}\right) - \left(\frac{1}{2\pi - x} - \frac{1}{2\pi + x}\right) + \cdots,$$

e ponendo $\frac{1}{2}\pi - x$ per x

$$sec\, x = \left(\frac{2}{\pi - 2x} + \frac{2}{\pi + 2x}\right) - \left(\frac{2}{3\pi - 2x} + \frac{2}{3\pi + 2x}\right)$$
$$+ \left(\frac{2}{5\pi - 2x} + \frac{2}{5\pi + 2x}\right)$$
$$- \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots .$$

---

bro gode tutte le proprietà caratteristiche di *cot* π x. Questa seconda parte della dimostrazione si potrebbe tralasciare qualora fosse dimostrato a priori la possibilità dello sviluppo in serie da cui abbiamo preso le mosse; e questa possibilità si deduce come conseguenza da un teorema generale che oltrepassa i limiti di questo Trattato e che si può leggere nella *Théorie des Fonct. doubles périodiques* di Briot e Bouquet, pag. 37.

e per conseguenza

$$(d) \qquad \sec x = 4 \sum_1^\infty (-1)^{n-1} \frac{(2n-1)\pi}{(2n-1)^2 \pi^2 - 4x^2}.$$

277. Le serie (a), (b), (c), (d) si possono trasformare in altre ordinate secondo le potenze di x. Cominciando dalla prima che potremo scrivere

$$\cot x = \frac{1}{x} - \sum_1^\infty \frac{2x}{n^2\pi^2} \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{x}{n\pi}\right)^2},$$

si vede che tutte le volte che x è compreso fra $-\pi$ e $+\pi$, si ha

$$\frac{1}{1 - \left(\frac{x}{n\pi}\right)^2} = \sum_{m=0}^{m=\infty} \frac{x^{2m}}{n^{2m}\pi^{2m}};$$

quindi

$$\cot x = \frac{1}{x} - \sum_{n=1}^{n=\infty} \sum_{m=0}^{m=\infty} \frac{2x^{2m+1}}{n^{2m+2}\pi^{2m+2}}$$

$$= \frac{1}{x} - \sum_{m=0}^{m=\infty} \frac{2x^{2m+1}}{\pi^{2m+2}} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n^{2m+2}},$$

ovvero

$$(e) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \cot x = \frac{1}{x} - \sum_{m=0}^{m=\infty} \frac{2\, S_{2m+2}}{\pi^{2m+2}} x^{2m+1} \\ -\pi < x < +\pi. \end{array} \right.$$

Lo stesso metodo può applicarsi all'equazione (b), purchè x si estenda solamente fra $-\frac{\pi}{2}$ e $+\frac{\pi}{2}$; ma se osserviamo che

$$\tan x = \cot x - 2 \cot 2x,$$

otterremo più rapidamente

$$(f) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \tan x = \sum_{m=0}^{m=\infty} \frac{2(2^{2m+2}-1)\, S_{2m+2}}{\pi^{2m+2}} x^{2m+1} \\ -\frac{1}{2}\pi < x < +\frac{1}{2} x. \end{array} \right.$$

Dalla formola

$$2\, cosec\, x = cot \frac{1}{2} x + tan \frac{1}{2} x \ ,$$

si ricava

$$cosec\, x = \frac{1}{x} - \sum_{m=0}^{m=\infty} \frac{(2^{2m+1}-1) S_{2m+2}}{2^{2m} \pi^{2m+2}} x^{2m+1}$$

$$-\pi < x < +\pi.$$

Facendo uso dell'equazione (10) le ultime tre formole diventano

$$(g) \quad \left\{ \begin{aligned} cot\ x &= \frac{1}{x} - \sum_{m=0}^{m=\infty} \frac{2^{2m+2} B_{2m+1}}{\Pi(2m+2)} x^{2m+1} \ , \\ tan\ x &= \sum_{m=0}^{m=\infty} \frac{2^{2m+2}(2^{2m+2}-1) B_{2m+1}}{\Pi(2m+2)} x^{2m+1} \ , \\ cosec\ x &= \frac{1}{x} - \sum_{m=0}^{m=\infty} \frac{2(2^{2m+1}-1) B_{2m+1}}{\Pi(2m+2)} x^{2m+1}. \end{aligned} \right.$$

Parimente se osserviamo che la serie per la secante può scriversi

$$sec\, x = \sum_{1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{4}{(2n-1)\pi} \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{2x}{(2n-1)\pi}\right)^2} \ ,$$

avremo per tutti i valori di x compresi fra $-\frac{\pi}{2}$ e $+\frac{\pi}{2}$,

$$sec\, x = \sum_{n=1}^{n=\infty} \sum_{m=0}^{m=\infty} (-1)^{n-1} \frac{2^{2m+2} x^{2m}}{(2n-1)^{2m+1} \pi^{2m+1}}$$

$$= \sum_{m=0}^{m=\infty} \frac{2^{2m+2} x^{2m}}{\pi^{2m+1}} \sum_{n=1}^{n=\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{(2n-1)^{2m+1}} \ ,$$

ovvero ponendo

$$U_{2m+1} = \sum_{n=1}^{n=\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{(2n-1)^{2m+1}} \ ,$$

avremo

$$(h)\quad\left\{\begin{array}{l} \sec x = \sum_{m=0}^{m=\infty} \frac{2^{2m+2}\, U_{2m+1}}{\pi^{2m+1}}\, x^{2m} \\ -\frac{1}{2}\pi < x < +\frac{1}{2}\pi. \end{array}\right.$$

278. Dalle formole precedenti si possono dedurre nuove relazioni per determinare le somme S, U e i numeri di Bernouilli.

Così facciamo per un momento

$$A_{2m+1} = \frac{2\,(2^{2m+2}-1)\,S_{2m+2}}{\pi^{2m+2}},$$

e moltiplichiamo la serie

$$A_1 x + A_3 x^3 + A_5 x^5 + \cdots + A_{2m+1} x^{2m+1} + \cdots,$$

per la serie

$$1 - \frac{1}{1\,.\,2} x^2 + \frac{1}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4} x^4 - \cdots (-1)^m \frac{x^{2m}}{\Pi(2m)} \cdots\, ;$$

avremo per termine generale della serie prodotto l'espressione

$$\left[A_{2m+1} - \frac{A_{2m-1}}{1\,.\,2} + \frac{A_{2m-3}}{1\,.\,2\,.\,3} - \cdots (-1)^m \frac{A_1}{1\,.\,2 \ldots (2m)}\right] x^{2m+1},$$

che dev'essere eguale a

$$(-1)^m \frac{1}{1\,.\,2 \ldots (2m+1)} x^{2m+1},$$

termine generale della serie

$$sen\, x = x - \frac{1}{1\,.\,2\,.\,3} x^3 + \frac{1}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5} x^5 - \cdots$$

Quindi avremo

$$A_{2m+1} - \frac{A_{2m-1}}{1\,.\,2} + \frac{A_{2m-3}}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4} - \cdots (-1)^m \frac{A_1}{1\,.\,2 \ldots (2m)}$$
$$= (-1)^m \frac{1}{1\,.\,2 \ldots (2m+1)},$$

ovvero ponendo

$$A_{2m+1} = \frac{T_{2m+1}}{\Pi\,(2m+1)},$$

avremo

$$T_{2m+1} - (2m+1)_2\, T_{2m-1} + (2m+1)_4\, T_{2m-3} - \cdots$$

$$+ (-1)^m (2m+1)_{2m}\, T_1 = (-1)^m.$$

Poichè $T_1 = 1$, si vede che $T_3 = 2$, $T_5 = 16$ ec., in generale tutte le T sono numeri interi e positivi e si ha

$$\tan x = \sum_0^\infty \frac{T_{2m+1}}{\Pi\,(2m+1)}\, x^{2m+1}.$$

La relazione fra le quantità S_{2m+2}, T_{2m+1} e B_{2m+1}, è data dalle formole

$$\frac{2\,(2^{2m+2}-1)}{\pi^{2m+2}}\, S_{2m+2} = \frac{T_{2m+1}}{\Pi\,(2m+1)},$$

e

$$B_{2m+1} = \frac{(m+1)\, T_{2m+1}}{2^{2m+1}\,(2^{2m+2}-1)}.$$

Similmente se facciamo

$$\text{(i)} \qquad \frac{2^{2m+2}\, U_{2m+1}}{\pi^{2m+1}} = \frac{T_{2m}}{\Pi\,(2m)},$$

il termine generale del prodotto della serie

$$\sec x = 1 + \frac{T_2}{1\,.\,2}\, x^2 + \frac{T_4}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}\, x^4 + \cdots,$$

per la serie

$$\cos x = 1 - \frac{1}{1\,.\,2}\, x^2 + \frac{1}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}\, x^4 - \cdots,$$

è

$$\left[\frac{T_{2m}}{\Pi(2m)} - \frac{T_{2m-2}}{\Pi(2m-2)}\frac{1}{\Pi 2} + \frac{T_{2m-4}}{\Pi(2m-4)}\frac{1}{\Pi 4} - \cdots \right.$$
$$\left. + (-1)^{m-1}\frac{T^2}{\Pi 2}\frac{1}{\Pi(2m-2)} + (-1)^m \frac{1}{\Pi(2m)}\right] x^{2m},$$

che deve essere eguale a zero, quindi

$$T_{2m} - (2m)_2 T_{2m-2} + (2m)_4 T_{2m-4} - \cdots + (-1)^{m-1}(2m)_{2m-2} T_2$$
$$+ (-1)^m = 0.$$

Poichè $T_2 = 1$, si trova $T_4 = 5$, $T_6 = 61$, ec.; e la formola (i) dà

$$U_3 = 1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \cdots = \frac{\pi^3}{32},$$

$$U_5 = 1 - \frac{1}{3^5} + \frac{1}{5^5} - \frac{1}{7^5} + \cdots = \frac{\pi^5}{1536},$$

. . . .

CAPITOLO XII.

FACOLTÀ ANALITICHE.

Nel Capitolo precedente abbiamo veduto che le funzioni circolari ed iperboliche si esprimono mediante prodotti infiniti; non sono però queste le sole funzioni capaci di una tale espressione, essendo manifesto che qualunque funzione sviluppabile secondo una serie convergente, può porsi sotto forma di prodotto infinito, comunque non si conoscano metodi generali per eseguire questa trasformazione. Fra le funzioni esprimibili per prodotti infiniti sono notevoli le *facoltà analitiche*, che hanno occupato varii distinti geometri. Noi stimiamo far cosa utile per gli studiosi italiani, esponendo qui brevemente i principii fondamentali di questa teoria; nel che seguiremo le tracce del Sig. Weierstrass, come quello che, a nostro parere, ha saputo dare meglio di ogni altro base rigorosamente scientifica a questa dottrina.

Fattoriale.

Per procedere con chiarezza, cominceremo dallo studiare le proprietà principali del prodotto infinito

$$u \prod_{\alpha=1}^{\alpha=\infty} \left(\frac{\alpha}{\alpha+1}\right)^u \left(1+\frac{u}{\alpha}\right),$$

ove u può avere qualunque valore reale o complesso. Questo prodotto infinito, che ha una grande importanza nella teoria delle facoltà analitiche, ha ricevuto il nome di *fattoriale* ed è stato indicato colla notazione $Fc(u)$, in guisa che si ha

$$(1) \qquad Fc(u) = u \prod_{\alpha=1}^{\alpha=\infty} \left(\frac{\alpha}{\alpha+1}\right)^u \left(1+\frac{u}{\alpha}\right). \text{[1]}$$

[1] Il Prof. Betti si è giovato del fattoriale di Weierstrass, che ha chiamato *emiseno*, per dedurre la teoria delle funzioni circolari da quella dei prodotti infiniti.

279. *La funzione* Fc (u) *ha un valore finito e determinato per ogni valore finito di* u.

Infatti è chiaro che $Fc(u)$ è il limite della funzione

$$F(u,n) = n^{-u} u (1+u)\left(1+\frac{u}{2}\right) \cdots \left(1+\frac{u}{n-1}\right),$$

per $n=\infty$; ora si ha

$$\frac{F(u,n)}{F(u,n-1)} = \left(\frac{n}{n-1}\right)^{-u}\left(1+\frac{u}{n-1}\right) = \left(1-\frac{1}{n}\right)^{u}\left(1+\frac{u}{n-1}\right)$$

$$= \left(1-\frac{u}{n}+\frac{u(u-1)}{2n^2}+\cdots\right)\left(1+\frac{u}{n}+\frac{u}{n^2}+\cdots\right)$$

$$= 1-\frac{u(u-1)}{2n^2}+\cdots;$$

quindi per un teorema dimostrato nel Capitolo 10° (pag. 271), $F(u,n)$ non cresce indefinitamente con n, ma converge verso un limite finito e determinato, che può essere anche u. Alla stessa conseguenza si può giungere prendendo il logaritmo di $Fc(u)$; infatti si trova

$$l\,Fc(u) = l\,u + u \sum l\left(1-\frac{1}{\alpha+1}\right) + \sum l\left(1+\frac{u}{\alpha}\right);$$

laonde facendo uso di una nota formola (184), avremo

$$l\,Fc(u) = l u - u\sum\frac{1}{\alpha+1} - u\sum\frac{\mu_\alpha}{(\alpha+1)^2} + u\sum\frac{1}{\alpha} - u^2\sum\frac{\mu'_\alpha}{\alpha^2}$$

$$= l\,u + u\sum\frac{1}{\alpha(\alpha+1)} - u\sum\frac{\mu_\alpha}{(\alpha+1)^2} - u^2\sum\frac{\mu'_\alpha}{\alpha^2}.$$

Ma le serie contenute nel secondo membro sono tutte convergenti, dunque $l\,Fc(u)$, e per conseguenza $Fc(u)$ ha un valore finito e determinato.

280. *Le condizioni necessarie e sufficienti che determinano la funzione* Fc (u), *sono le seguenti*

$$(2) \qquad Fc(u) = u\, Fc(u+1)\ ,$$

$$(3) \qquad Fc(1) = 1\ ,$$

$$(4) \qquad \lim_{n=\infty} \left[\frac{Fc(n)}{n^u\, Fc(u+n)} \right] = 1\ ,$$

ove n *è un numero intero e positivo.*

La formola (3) è una conseguenza immediata della (1). Per ottenere l'equazione (2), poniamo nella formola

$$F(u, n) = n^{-u} \frac{u(u+1)(u+2)\dots(u+n-1)}{1.2.3\dots(n-1)}\ ,$$

$u+1$ per u e moltiplichiamo il risultato per u, troveremo facilmente

$$u\, F(u+1, n) = \frac{u+n}{n} F(u+n)\ ;$$

facendo in questa eguaglianza n infinito, si ottiene la formola (2). Le formole (1) e (2) mostrano chiaramente che il fattoriale $Fc(u)$ non può annullarsi che per $u=0$, o per valori interi e negativi di u.

Se n è un numero intero e positivo, dall'equazione (2) segue

$$Fc(u) = u(u+1)(u+2)\dots(u+n-1)\, Fc(u+n)\ ,$$

$$Fc(1) = 1.2.3\dots(n-1)\, Fc(n)\ ;$$

dalle quali si deduce avuto riguardo alla (3)

$$\frac{Fc(n)}{n^u\, Fc(u+n)} Fc(u) = n^{-u} \frac{u(u+1)\dots(u+n-1)}{1.2.3\dots(n-1)}\ ;$$

prendendo il limite di questa eguaglianza si ha la formola (4).

Reciprocamente una funzione che soddisfa all'equazio-

ni (2), (3), (4), non può essere altro che $Fc(u)$. Infatti dalla (2) e dalla (3) si ricava

$$Fc(u) = \frac{u(u+1)\dots(u+n-1)}{1.2\dots(n-1)} \frac{Fc(u+n)}{Fc(n)},$$

e questa combinata colla (4) riproduce la formola (1).

È utile osservare che la formola (4) sussiste per qualunque valore positivo di n. Infatti indichiamo con m un numero positivo non intero qualunque, e con n il massimo numero intero contenuto in esso, talchè si abbia $m = n + \iota$, avremo

$$\frac{Fc(m)}{m^u Fc(u+m)} = \left[\frac{Fc(n)}{n^{u+\iota} Fc(u+\iota+n)} : \frac{Fc(n)}{n^\iota Fc(\iota+n)}\right] : \left(\frac{n+\iota}{n}\right)^u,$$

da cui

$$(5) \qquad \lim_{m=\infty} \left[\frac{Fc(m)}{m^u Fc(u+m)}\right] = 1.$$

Da questa formola se ne può dedurre un'altra di cui avremo bisogno. Si ha

$$\frac{Fc(1+m-y)}{m^y Fc(1+m)} = \left[1 : \frac{Fc(1+m)}{(1+m)^{-y} Fc(1+m-y)}\right] \left(\frac{1+m}{m}\right)^y,$$

da cui

$$(6) \qquad \lim_{m=\infty} \left[\frac{Fc(1+m-y)}{m^y Fc(1+m)}\right] = 1.$$

284. *Il fattoriale* Fc (u) *è una funzione continua di* u.

Per dimostrare questo teorema, basta provare che $Fc(u)$, è sviluppabile in una serie convergente ordinata secondo le potenze di u (111).

Ciò posto, supponiamo in prima che il modulo di u sia minore di un numero arbitrario m intero e positivo, e facciamo

$$Fc(u) = u \prod_1^{m-1} \left[\left(\frac{\alpha}{\alpha+1}\right)^u \left(1+\frac{u}{\alpha}\right)\right] \prod_m^\infty \left[\left(\frac{\alpha}{\alpha+1}\right)^u \left(1+\frac{u}{\alpha}\right)\right],$$

$$\varphi(u.m) = \prod_m^\infty \left[\left(\frac{\alpha}{\alpha+1}\right)^u \left(1+\frac{u}{\alpha}\right)\right]$$

$$= \prod_0^\infty \left[\left(\frac{\alpha+m}{\alpha+m+1}\right)^u \left(1+\frac{u}{\alpha+m}\right)\right].$$

Prendendo i logaritmi neperiani dei due membri dell' ultima eguaglianza, avremo

$$l\,\varphi(u,m)=\sum_{\alpha=0}^{\alpha=\infty}\left[-u\,l\left(1+\frac{1}{\alpha+m}\right)+l\left(1+\frac{u}{\alpha+m}\right)\right],$$

ovvero (183)

$$l\,\varphi(u,m)=\sum_{\alpha=0}^{\alpha=\infty}\sum_{h=2}^{h=\infty}(-1)^{h-1}\frac{u^h-u}{h(\alpha+m)^h}.$$

Poniamo

$$\varphi_\alpha(u)=\sum_{h=2}^{h=\infty}(-1)^{h-1}\frac{u^h-u}{h(\alpha+m)^h},$$

e indichiamo con $\psi_\alpha(u)$ il valore che prende questa funzione se pei coefficienti si sostituiscono i moduli rispettivi, in modo che sia

$$\psi_\alpha(u)=\sum_{h=2}^{h=\infty}\frac{u^h+u}{h(\alpha+m)^h}.$$

Per un teorema già dimostrato (137), la somma

$$\varphi_1(u)+\varphi_2(u)+\varphi_3(u)+\cdots,$$

sarà sviluppabile in una serie convergente ordinata secondo le potenze di u, se la somma

$$\sum_{\alpha=0}^{\alpha=\infty}\sum_{h=2}^{h=\infty}\frac{u^h+u}{h(\alpha+m)^h}=\psi_1(u)+\psi_2(u)+\psi_3(u)+\cdots,$$

ha un valore finito e determinato per un valore del modulo di u.

Ora questa somma è uguale alla serie doppia

$$\frac{u^2+u}{2m^2}\left[1+\frac{1}{\left(1+\frac{1}{m}\right)^2}+\frac{1}{\left(1+\frac{2}{m}\right)^2}+\cdots\right]$$

$$+\frac{u_3+u}{3m^3}\left[1+\frac{1}{\left(1+\frac{1}{m}\right)^3}+\frac{1}{\left(1+\frac{2}{m}\right)^3}+\cdots\right]$$

$$+\frac{u^4+u}{4m^4}\left[1+\frac{1}{\left(1+\frac{1}{m}\right)^4}+\frac{1}{\left(1+\frac{2}{m}\right)^4}+\cdots\right]$$

$$+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

che ha tutte le serie orizzontali convergenti.

Inoltre facendo

$$s_h = \sum_{\alpha=0}^{\alpha=\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{\alpha}{m}\right)^h},$$

la serie che ha per termini le somme delle serie orizzontali, cioè la serie

$$\sum_{h=2}^{h=\infty} \frac{u^h + u}{h\, m^h} s_h,$$

è altresì convergente per tutta la porzione del piano compresa in un cerchio, il cui raggio è minore di m. Infatti indicando con v_n il termine generale di questa serie, troveremo

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{u^n+1}{u^{n-1}+1} \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)m} \cdot \frac{s_{n+1}}{s_n};$$

ma se $m > mod\ u$

$$\lim_{n=\infty}\left[\frac{u^n+1}{m(u^{n-1}+1)}\right] = k < 1, \quad \lim_{n=\infty}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right) = 1,$$

e $\frac{s_{n+1}}{s_n}$ è una quantità minore di 1. Dunque nell'ipotesi accennata la serie doppia è convergente, e per conseguenza $l\,\varphi(u, m)$, come pure

$$\prod_{\alpha=m}^{\alpha=\infty} \left(\frac{\alpha}{\alpha+1}\right)^u \left(1+\frac{u}{\alpha}\right) = e^{l\varphi(u,m)},$$

è sviluppabile in una serie convergente ordinata secondo le potenze di u.

Se osserviamo che il prodotto finito

$$u \prod_{\alpha=1}^{\alpha=m-1} \left(\frac{\alpha}{\alpha+1}\right)^u \left(1+\frac{u}{\alpha}\right),$$

può altresì porsi sotto forma di una serie della stessa natura, se-

gue da ciò che precede che $Fc(u)$ è sviluppabile secondo le potenze intere e positive di u in una serie che è convergente per tutta la porzione del piano compresa in un cerchio di raggio minore di m. Ma il numero m può essere preso grande quanto si vuole; dunque la serie di cui è parola, sarà convergente in tutta l'estensione del piano.

282. Il fattoriale ha una relazione notevole colle funzioni circolari. E invero se moltiplichiamo l'equazione (1) coll'altra

$$Fc(-u) = -u \prod_{\alpha=1}^{\alpha=\infty} \left(\frac{\alpha}{\alpha+1}\right)^{-u} \left(1 - \frac{u}{\alpha}\right),$$

troveremo

$$Fc(u)\,Fc(-u) = -u^2 \prod_{\alpha=1}^{\alpha=\infty} \left(1 - \frac{u^2}{\alpha^2}\right),$$

ovvero

$$Fc(u)\,Fc(-u) = -u\,\frac{\operatorname{sen}(u\pi)}{\pi},$$

e per la (2)

$$Fc(-u) = -\frac{\operatorname{sen}(u\pi)}{\pi\, Fc(u+1)}.$$

Facoltà analitiche.

283. Si chiamano *facoltà analitiche* le funzioni

$$(7) \qquad (u, +x)^y = x^y \frac{Fc\left(\frac{u}{x}\right)}{Fc\left(\frac{u}{x}+y\right)},$$

$$(8) \qquad (u, -x)^y = x^y \frac{Fc\left(\frac{u}{x}+1-y\right)}{Fc\left(\frac{u}{x}+1\right)},$$

che dipendono da tre elementi comunque variabili, la *base* u, la

differenza x e l'*esponente* y. La notazione che adottiamo è dovuta a Crelle; il segno posto innanzi alla x viene a significare che la variabile x è unita alla base u in un certo modo particolare; x poi può essere positivo o negativo; in questo secondo caso le funzioni si scriveranno

$$(u, +(-x))^y, \ (u, -(-x))^y.$$

Questa osservazione è molto importante come apparirà manifesto da quel che segue.

Dimostriamo le proprietà fondamentali delle funzioni (7) e (8).

284. *Le condizioni necessarie e sufficienti che determinano la funzione* (7), *sono le seguenti*

$$(9) \qquad (u+x, +x)^y = \frac{u+yx}{u}(u, +x)^y,$$

$$(10) \qquad \lim_{n=\infty}\left[\frac{(u+nx, +x)^y}{(u+nx)^y}\right] = 1^y.$$

Infatti dalla formola (7), si ha

$$(u+x, +x)^y = x^y \frac{Fc\left(\frac{u}{x}+1\right)}{Fc\left(\frac{u}{x}+y+1\right)};$$

e per l'equazione (2)

$$(u+x, +x)^y = x^y \frac{Fc\left(\frac{u}{x}\right)}{Fc\left(\frac{u}{x}+y\right)} \cdot \frac{u+yx}{u},$$

ovvero

$$(u+x, +x)^y = \frac{u+yx}{u}(u, +x)^y.$$

Inoltre si ha

$$(u+nx, +x)^y = x^y \frac{Fc\left(\frac{u}{x}+n\right)}{Fc\left(\frac{u}{x}+y+n\right)},$$

da cui

$$\frac{(u+nx,+x)^{\nu}}{(u+nx)^{\nu}}=\frac{(nx)^{\nu}}{(u+nx)^{\nu}}\cdot\frac{Fc\left(\frac{u}{x}+n\right)}{n^{-\frac{u}{x}}Fc(n)}:\frac{Fc\left(\frac{u}{x}+y+n\right)}{n^{-\frac{u}{x}-y}Fc(n)},$$

e passando al limite, avendo riguardo alla formola (4), si trova immediatamente l' equazione (10).

Reciprocamente la formola (7) è una conseguenza dell' equazioni (9) e (10).

Infatti dalla formola (9) si ricava

$$(u,+x)^{\nu}=\frac{u}{u+yx}(u+x,+x)^{\nu};$$

se in questa equazione sostituiamo per u successivamente $u+x,\ u+2x,\ldots.\ u+(n-1)\,x$, e moltiplichiamo fra loro l' equazioni che ne risultano, troveremo

$$(u,+x)^{\nu}=\frac{u\,(u+x)\,(u+2x)\ldots.(u+(n-1)\,x)}{(u+y\,x)(u+y\,x+x)\ldots.(u+y\,x+(n-1)\,x)}(u+nx,+x)^{\nu}$$

$$=\frac{\frac{u}{x}\left(1+\frac{u}{x}\right)\left(1+\frac{u}{2x}\right)\ldots.\left(1+\frac{u}{(n-1)\,x}\right)}{\frac{u+yx}{x}\left(1+\frac{u+yx}{x}\right)\left(1+\frac{u+yx}{2x}\right)\ldots.\left(1+\frac{u+yx}{(n-1)x}\right)}(u+nx,+x)^{\nu}.$$

Ora dalla formola

$$F(u,n)=n^{-u}\,u\,(1+u)\left(1+\frac{u}{2}\right)\ldots.\left(1+\frac{u}{n-1}\right),$$

si ricavano le seguenti

$$F\left(\frac{u}{x},n\right)=n^{-\frac{u}{x}}\frac{u}{x}\left(1+\frac{u}{x}\right)\left(1+\frac{u}{2x}\right)\ldots.\left(1+\frac{u}{(n-1)\,x}\right),$$

$$F\left(\frac{u}{x}+y,n\right)=n^{-\frac{u}{x}-y}\frac{u+yx}{x}\left(1+\frac{u+yx}{x}\right)\ldots\left(1+\frac{u+y\,x}{(n-1)x}\right);$$

quindi il valore di $(u,+x)^y$ acquista la forma

$$(u,+x)^y = \left(\frac{1}{n}\right)^y \frac{F\left(\frac{u}{x}, n\right)}{F\left(\frac{u}{x}+y, n\right)} (u+nx, +x)^y ,$$

che potremo scrivere anche così

$$(u,+x)^y = x^y \left(\frac{u+nx}{nx}\right)^y \frac{F\left(\frac{u}{x}, n\right)}{F\left(\frac{u}{x}+y, n\right)} \cdot \frac{(u+nx, +x)^y}{(u+nx)^y} .$$

Facendo in questa formola $n=\infty$, e avendo riguardo all' equazione (10), si ottiene subito la formola (7).

285. Dalla formola (7) si deducono facilmente le seguenti

$$(11) \quad \left\{ \begin{aligned} &(u,+x)^{y+k} = (u,+x)^y (u+yx, +x)^k , \\ &(u,+x)^{y-k} = \frac{(u,+x)^y}{(u+(y-k)x, +x)^k} , \\ &(ku, +kx)^y = k^y (u,+x)^y , \\ &(u,+x)^1 = u. \end{aligned} \right.$$

Queste formole contengono le proprietà fondamentali della funzione $(u,+x)^y$; da esse se ne deducono delle altre.

Se nella formola (7) e nella seconda delle (11) facciamo $y=0$, troveremo

$$(12) \quad \left\{ \begin{aligned} &(u,+x)^0 = 1 , \\ &(u,+x)^{-y} = \frac{1}{(u-yx, +x)^y} . \end{aligned} \right.$$

Se nella terza delle equazioni (11) poniamo $k=\frac{w}{x}$, troveremo

$$\left(\frac{uw}{x}, +w\right)^y = \left(\frac{w}{x}\right)^y (u,+x)^y ;$$

Ma dalla formola

$$(u+yx,+x)^k=\frac{(u,+x)^{y+k}}{(u,+x)^y},$$

si deduce

$$(v+kw,+w)^y=\frac{(v,+w)^{y+k}}{(v,+w)^k},$$

nella quale facendo $k=\frac{u}{x}-\frac{v}{w}$, si trova

$$\left(\frac{uw}{x},+w\right)^y=\frac{(v,+w)^{y+\frac{u}{x}-\frac{v}{w}}}{(v,+w)^{\frac{u}{x}-\frac{v}{w}}},$$

e per conseguenza

$$(13)\qquad (u,+x)^y=\left(\frac{x}{w}\right)^y\frac{(v,+w)^{y+\frac{u}{x}-\frac{v}{w}}}{(v,+w)^{\frac{u}{x}-\frac{v}{w}}}.$$

Questa formola, ove v e w sono quantità interamente arbitrarie, mostra che una facoltà può sempre trasformarsi nel rapporto di due altre che abbiano base e differenza affatto arbitrarie.

Nella formola fondamentale (7) poniamo $u=1$, $x=\frac{1}{m}$, ove m è un numero positivo, avremo

$$\left(1,+\frac{1}{m}\right)^y=1^y\frac{Fc\,(m)}{m^y\,Fc\,(m+y)}.$$

Se ora osserviamo (280) che il fattore che moltiplica 1^y converge verso 1 al crescere di m, vediamo che la funzione $(1,+x)^y$ al decrescere di x converge verso 1^y.

Se y è un numero intero, la formola (9), avuto riguardo alla relazione

$$Fc\,(u)=u\,(u+1)\,(u+2)\,\ldots\,(u+y-1)\,Fc\,(u+y),$$

diventa

$$(u, + x)^y = u(u+x)(u+2x)\dots(u+(y-1)x);$$

lo che mostra che, nel caso di un esponente numero intero e positivo, la facoltà analitica $(u, + x)^y$ è un prodotto di fattori equidifferenti.

Parimente, dalla seconda delle formole (12), supposto y numero intero e positivo, si deduce

$$(u, + x)^{-y} = \frac{1}{(u-x)(u-2x)\dots(u-yx)}.$$

286. *Le condizioni necessarie e sufficienti che determinano la funzione* (8) *sono le seguenti*

$$(14) \qquad (u-x, -x)^y = \frac{u-yx}{u}(u, -x)^y,$$

$$(15) \qquad \lim_{n=\infty} \left[\frac{(u+nx, -x)^y}{(u+nx)^y}\right] = 1^y.$$

Infatti la formola (8) avuto riguardo alla (2), può scriversi

$$(u, -x)^y = \frac{ux^y}{u-xy} \frac{Fc\left(\frac{u}{x}-y\right)}{Fc\left(\frac{u}{x}\right)};$$

questa eguaglianza combinata coll'altra

$$(u-x, -x)^y = x^y \frac{Fc\left(\frac{u}{x}-y\right)}{Fc\left(\frac{u}{x}\right)},$$

dà immediatamente la (14).

Parimente si ha

$$(u+nx, -x)^y = x^y \frac{Fc\left(\frac{u}{x}+n+1-y\right)}{Fc\left(\frac{u}{x}+n+1\right)},$$

da cui

$$\frac{(u+nx,-x)^y}{(u+nx)^y}$$

$$=\left(\frac{nx}{u+nx}\right)^y \cdot \frac{Fc\left(1+n+\frac{u}{x}-y\right)}{n^{y-\frac{u}{x}}\,Fc(1+n)} \cdot \frac{n^{-\frac{u}{x}}\,Fc(1+n)}{Fc\left(1+n+\frac{u}{x}\right)}.$$

Se facciamo $n=\infty$, avendo presente la formola (6), troviamo immediatamente l'equazione (15).

Reciprocamente la formola (8) è una conseguenza dell'eguaglianze (14) e (15). Infatti ponendo nella (14) $u+x$ per u, troveremo

$$(u,-x)^y=\frac{u+(1-y)x}{u+x}(u+x,-x)^y.$$

Se moltiplichiamo questa formola per tutte quelle che ne risultano ponendo $u+x$, $u+2x$, ... $u+n-1$ invece di u, avremo

$$(u,-x)^y=\frac{u+(1-y)x}{u+x}\cdot\frac{u+(2-y)x}{u+2x}\cdots\frac{u+(n-y)x}{u+nx}(u+nx,-x)^y$$

$$=\frac{\left(\frac{u}{x}+1-y\right)\left(1+\frac{\frac{u}{x}+1-y}{1}\right)\left(1+\frac{\frac{u}{x}+1-y}{2}\right)\cdots\left(1+\frac{\frac{u}{x}+1-y}{n-1}\right)}{\left(\frac{u}{x}+1\right)\left(1+\frac{\frac{u}{x}+1}{1}\right)\left(1+\frac{\frac{u}{x}+1}{2}\right)\cdots\left(1+\frac{\frac{u}{x}+1}{n-1}\right)}(u+nx,-x)^y.$$

Ora osserviamo che il numeratore del secondo membro è uguale a

$$n^{\frac{u}{x}+1-y}\,F\left(\frac{u}{x}+1-y,n\right),$$

il denominatore è uguale a

$$n^{\frac{u}{x}+1}\,F\left(\frac{u}{x}+1,n\right);$$

in guisa che avremo

$$(u,-x)^y = \frac{F\left(\frac{u}{x}+1-y,n\right)}{F\left(\frac{u}{x}+1,n\right)} n^{-y} (u+nx,-x)^y$$

$$= x^y \frac{F\left(\frac{u}{x}+1-y,n\right)}{F\left(\frac{u}{x}+1,n\right)} \cdot \frac{(u+nx,-x)^y}{(u+nx)^y} \cdot \left(\frac{u+nx}{nx}\right)^y .$$

La formola (8) è una conseguenza di quest'ultima, avendo riguardo all'equazione (15).

287. Dalla formola (8) si ricavano come nel n° 285, le seguenti formole

$$(u,-x)^{y+k} = (u,-x)^y (u-yx,-x)^k ,$$

$$(u,-x)^{y-k} = \frac{(u,-x)^y}{(u-(y-k)x,-x)^y} ,$$

$$(ku,-kx)^y = k^y (u,-x)^y ,$$

$$(u,-x)^1 = u ,$$

$$(u,-x)^0 = 1 ,$$

$$(u,-x)^{-y} = \frac{1}{(u+yx,-x)^y} ,$$

$$(u,-x)^y = \left(\frac{x}{w}\right)^y \frac{(v,-w)^{\frac{v}{w}-\frac{u}{x}+y}}{(v,-w)^{\frac{v}{w}-\frac{u}{x}}} ,$$

che valgono per qualunque valore di u, e le altre due

$$(16)\quad \begin{cases} (u,-x)^y = u(u-x)(u-2x)\dots(u-(y-1)x) , \\ (u,-x)^{-y} = \dfrac{1}{(u+x)(u+2x)\dots(u+yx)} , \end{cases}$$

che sussistono pei soli valori interi di y.

Anche la funzione $(1, -x)^y$ ha per limite 1^y per $x=0$, poichè si ha, indicando con m un numero positivo

$$\left(1, -\frac{1}{m}\right)^y = 1^y \frac{Fc(1+m-y)}{m^y\, Fc(1+m)}.$$

288. Dal confronto delle formole (16) colle due corrispondenti del numero (285), risulta che il valore della seconda facoltà analitica si ottiene da quello della prima mutando x in $-x$; sarebbe però errore gravissimo supporre che lo stesso avvenga in generale. La differenza che corre fra le due facoltà apparisce chiara dal paragone delle formole (7) e (8); tuttavia si può rendere meglio manifesta nel seguente modo.

Si ha

$$Fc\left(-\frac{u}{x}\right) = -\frac{\operatorname{sen}\frac{u}{x}\pi}{\pi\, Fc\left(\frac{u}{x}+1\right)},$$

$$Fc\left(-\frac{u}{x}+y\right) = -\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{u}{x}-y\right)\pi}{\pi\, Fc\left(\frac{u}{x}+1-y\right)}.$$

Ma

$$(u, +(-x))^y = (-x)^y \frac{Fc\left(-\frac{u}{x}\right)}{Fc\left(-\frac{u}{x}+y\right)},$$

quindi

$$(u, +(-x))^y = (-1)^y \frac{x^y\, Fc\left(\frac{u}{x}+1-y\right)}{Fc\left(\frac{u}{x}+1\right)} \cdot \frac{\operatorname{sen}\frac{u}{x}\pi}{\operatorname{sen}\left(\frac{u}{x}-y\right)\pi},$$

ovvero

$$(u, +(-x))^y = (-1)^y \frac{\operatorname{sen}\frac{u}{x}\pi}{\operatorname{sen}\left(\frac{u}{x}-y\right)\pi}(u, -x)^y.$$

Questa formola mostra chiaramente che le due funzioni $(u, +(-x))^y$ e $(u, -x)^y$ allora soltanto sono eguali quando y è un numero intero, poichè in questa ipotesi si ha

$$sen\left(\frac{u}{x}-y\right)\pi=(-1)^y sen\frac{u}{x}\pi.$$

Le due facoltà analitiche sono legate l'una all'altra dalle seguenti equazioni

$$(u, -x)^y=(u+x-xy, +x)^y=\frac{1}{(u+x, +x)^{-y}},$$

$$(u, +x)^y=(u-x+xy, -x)^y=\frac{1}{(u-x, -x)^{-y}},$$

che si deducono immediatamente dalle formole (7) e (8).

289. I geometri che hanno preceduto Weierstrass nell'esposizione di questa teoria, hanno considerato la sola facoltà analitica $(u, +x)^y$, poichè non hanno avvertito una proprietà notevole di questa funzione, cioè che essa soffre una interruzione di continuità se, lasciando immutate u e y, si fa passare x in modo continuo dal positivo al negativo. Infatti se nella formola (7) facciamo $u=1$, poniamo $-x$ invece di x e poi per x sostituiamo $\frac{1}{m}$, ove m è un numero positivo, troveremo

$$\left(1, -\frac{1}{m}\right)^y=(-1)^y\frac{Fc(-m)}{m^y\,Fc(-m+y)}.$$

Ma si ha

$$Fc(-m)=-\frac{sen(m\pi)}{\pi\,Fc(1+m)},$$

$$Fc(-m+y)=-\frac{sen(m-y)\pi}{\pi\,Fc(1+m-y)},$$

da cui

$$\left(1, -\frac{1}{m}\right)^y=(-1)^y\frac{Fc(1+m-y)}{m^y\,Fc(1+m)}\cdot\frac{sen(m\pi)}{sen(m-y)\pi}.$$

Il secondo membro di questa formola contiene tre fattori, di

cui il primo è indipendente da m, il secondo ha per limite 1 per $m=\infty$, e il terzo $\frac{sen\,(m\,\pi)}{sen\,(m-y)\,\pi}$ è una funzione periodica, la quale non converge verso alcun limite determinato al crescere di m; quindi $\left(1,-\frac{1}{m}\right)^{y}$ non converge verso alcun limite determinato al crescere di m. Dunque la funzione $(1,+x)^{y}$ subisce una interruzione di continuità quando x varia in modo continuo dal positivo al negativo.

Questa osservazione importante, non prima fatta da altri, ha condotto Weierstrass a considerare la seconda facoltà analitica che, per analogia, ha rappresentata con $(u,-x)^{y}$.

290. Terminiamo coll'osservare che anche il fattoriale è una facoltà analitica. Infatti se nell'equazione (7) poniamo $u=x=1$ e $u-1$ per y, troveremo

$$Fc\,(u)=\frac{1}{(1,+1)^{u-1}}.$$

Parimente se nella (8) facciamo $u=0$, $x=1$, $y=-u+1$, otterremo

$$Fc\,(u)=(0,-1)^{1-u}.$$

Per ulteriori ragguagli intorno a questa teoria rimandiamo alle opere ove è esposta estesamente. [1]

---

[1] Vandermonde, *Mémoire sur les irrationnelles de différens ordres ec.*, nella *Histoire de l'Acad. roy. des Sciences*, anno 1772, pag. 489. Kramp, *Analyse des réfractions astron. et terr.*, cap. 3°. *Crelle. Versuch einer allgemeinen Théorie der analytischen Facultaten*, e *Mémoire sur la théorie des puissances ec.*, nel tomo 7° del *Giornale di Crelle*. Bessel, *Ueber die Théorie der Zahlen facultaten in Königsberger Archiv für Natur* — Wissenschaft *und Math*, 1° tomo. Oettinger, *Untersuchungen über die Facultaten*, nel tomo 33° del *Giornale di Crelle*. Weierstrass nel volume 51 del *Giornale di Crelle*. Si possono anche consultare varie Memorie del Prof. Pacinotti, pubblicato negli Annali dell' Università di Pisa.

Osserviamo finalmente che Vandermonde fa

$$[p]^{n}=p\,(p-1)\,(p-2)\,\ldots\,(p-n+1)\,,$$

e Kramp

$$u^{y\,|\,x}=u\,(u+x)\,(u+2x)\,\ldots\,(u+(y-1)\,x).$$

Queste notazioni sono ancora usate da taluni geometri.

CAPITOLO XIII.

FRAZIONI CONTINUE.

Definizioni e considerazioni generali.

291. Se abbiamo una serie di frazioni

$$\frac{b_1}{a_1},\ \frac{b_2}{a_2},\ \frac{b_3}{a_3}\ldots\ldots,$$

e se aggiungiamo al denominatore della prima la seconda frazione, al denominatore della seconda la terza frazione, e così di seguito, otterremo l'espressione

$$(1)\qquad \cfrac{b_1}{a_1+\cfrac{b_2}{a_2+\cfrac{b_3}{a_3+\cdots}}},$$

che si chiama *frazione continua.* Le quantità $a_1, a_2, a_3,\ldots b_1, b_2, b_3,\ldots$ possono essere positive o negative, intere o fratte, razionali o irrazionali, reali o complesse; in quel che segue supporremo che sieno sempre quantità reali. Le frazioni $\frac{b_1}{a_1},\ \frac{b_2}{a_2},\ \frac{b_3}{a_3},\ldots$ che sono i termini successivi della frazione continua, diconsi *frazioni parziali; $b_1, b_2, b_3, \ldots$ numeratori parziali; $a_1, a_2, a_3, \ldots$ denominatori parziali.*

Dalla data definizione risulta manifestamente che il valore di una frazione continua non rimane alterato moltiplicando i due termini di una frazione parziale e il numeratore della frazione parziale seguente per una stessa quantità. Talchè la frazione continua

$$(1)'\qquad \cfrac{A_1 b_1}{A_1 a_1+\cfrac{A_1 A_2 b_2}{A_2 a_2+\cfrac{A_2 A_3 b_3}{A_3 a_3+\cdots}}},$$

ove A_1, A_2, A_3, ... sono quantità arbitrarie ma finite e differenti da zero, è il tipo di tutte le frazioni continue che hanno lo stesso valore della (1), ma forma differente.

Da questa osservazione risultano varie conseguenze interessanti.

1°. La frazione continua (1) può sempre trasformarsi in un'altra nella quale tutti i numeratori parziali sieno eguali a 1, cioè può sempre ridursi alla forma

$$\frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \cdots}}} \tag{2}$$

Infatti basta fare nell'espressione (1)

$$A_{2n-1} = \frac{b_2 b_4 \ldots b_{2n-2}}{b_1 b_3 b_5 \ldots b_{2n-1}} ,$$

$$A_{2n} = \frac{b_1 b_3 \ldots \ldots b_{2n-1}}{b_2 b_4 \ldots b_{2n}} .$$

2°. La frazione continua

$$\frac{b_1}{-a_1 + \frac{b_2}{-a_2 + \frac{b_3}{-a_3 + \cdots}}} ,$$

ove tutti i denominatori parziali sono negativi, è uguale alla frazione continua (1) presa negativamente.

3°. Una frazione continua con denominatori parziali negativi può sempre trasformarsi senza cangiar valore, in un'altra frazione continua i cui denominatori parziali sieno tutti positivi. In guisa che tutte le frazioni continue reali sono comprese sotto la forma

$$\frac{b_1}{a_1 \pm \frac{b_2}{a_2 \pm \frac{b_3}{a_3 \pm \cdots}}} ,$$

ove a_1, a_2, a_3, ... b_1, b_2, b_3, ... sono quantità positive.

La frazione continua (1) suole indicarsi col simbolo

$$\left(\frac{b_1}{a_1},\ \frac{b_2}{a_2},\ \frac{b_3}{a_3},\dots\right),$$

e la (2) più semplicemente con

$$(a_1,\ a_2,\ a_3,\dots).$$

Le frazioni

$$\frac{b_1}{a_1},\quad \cfrac{b_1}{a_1+\cfrac{b_2}{a_2}},\quad \cfrac{b_1}{a_1+\cfrac{b_2}{a_2+\cfrac{b_3}{a_3}}},\ \text{ec.},$$

che si deducono dalla frazione continua (1) arrestandosi alla prima, alla seconda, alla terza ec. frazione parziale, si chiamano *ridotte*.

La ridotta

$$\cfrac{b_1}{a_1+\cfrac{b_2}{a_2+\cdots+\cfrac{b_m}{a_m}}}, \tag{3}$$

essendo una frazione continua finita che termina colla frazione parziale $\frac{b_m}{a_m}$, può indicarsi con

$$\left(\frac{b_1}{a_1},\ \frac{b_m}{a_m}\right)=\frac{P_m}{Q_m}.$$

La ridotta m^{esima} corrispondente alla frazione (2), si rappresenta con

$$(a_1,\ a_m)=\frac{p_m}{q_m}.$$

Le frazioni continue, come le serie e i prodotti infiniti, possono essere convergenti, indeterminate, divergenti; ma prima di esporre i principali criterii per riconoscere la natura di una frazione continua, è utile premettere la legge di formazione e le proprietà fondamentali delle ridotte.

Proprietà delle ridotte.

292. Per scoprire la legge di formazione delle ridotte, osserviamo che si ha

$$\frac{P_0}{Q_0}=\frac{0}{1},$$

$$\frac{P_1}{Q_1}=\frac{b_1}{a_1},$$

$$\frac{P_2}{Q_2}=\cfrac{b_1}{a_1+\cfrac{b_2}{a_2}}=\frac{a_2 b_1}{a_2 a_1+b_2}=\frac{a_2 P_1+b_2 P_0}{a_2 Q_1+b_2 Q_0},$$

$$\frac{P_3}{Q_3}=\cfrac{b_1}{a_1+\cfrac{b_2}{a_2+\cfrac{b_3}{a_3}}}=\frac{a_3 a_2 b_1+b_3 b_1}{a_3(a_2 a_1+b_2)+b_3 a_1}=\frac{a_3 P_2+b_3 P_1}{a_3 Q_2+b_3 Q_1}.$$

Supponiamo quindi che la legge che già si manifesta da queste prime ridotte sia stata verificata sino alla ridotta $(m-1)^{esima}$, cioè che si abbia

$$\frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}}=\frac{a_{m-1}P_{m-2}+b_{m-1}P_{m-3}}{a_{m-1}Q_{m-2}+b_{m-1}Q_{m-3}};$$

dico che la stessa legge avrà luogo per la ridotta m^{esima}. Infatti il valore di $\frac{P_m}{Q_m}$ si deduce da quello di $\frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}}$, sostituendo in quest'ultima ridotta $a_{m-1}+\frac{b_m}{a_m}$ invece di a_{m-1}; quindi avremo

$$\frac{P_m}{Q_m}=\frac{\left(a_{m-1}+\frac{b_m}{a_m}\right)P_{m-2}+b_{m-1}P_{m-3}}{\left(a_{m-1}+\frac{b_m}{a_m}\right)Q_{m-2}+b_{m-1}Q_{m-3}},$$

ovvero

$$\frac{P_m}{Q_m}=\frac{a_m P_{m-1}+b_m P_{m-2}}{a_m Q_{m-1}+b_m Q_{m-2}},$$

come volevamo dimostrare.

Dall' ultima formola apparisce manifesto che per formare la ridotta m^{esima} bisogna moltiplicare i due termini della ridotta $(m-1)^{esima}$ pel denominatore parziale m^{esimo}, i due termini della ridotta $(m-2)^{esima}$ pel numeratore parziale m^{esimo}, e addizionare termine a termine queste due frazioni.

Esempio. Cerchiamo le ridotte della frazione continua

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \ldots\right).$$

Le prime due sono

$$\frac{0}{1}, \frac{1}{2},$$

quindi le altre saranno

$$\frac{4\times1}{4\times2+3}=\frac{4}{11},$$

$$\frac{6\times4+5\times1}{6\times11+5\times2}=\frac{29}{76},$$

$$\frac{8\times29+7\times4}{8\times76+7\times11}=\frac{260}{685},$$

. . . .

293. Un' altra conseguenza importante che si deduce dalla formola precedente è che se le quantità che compongono una frazione continua sono tutte numeri commensurabili, una ridotta qualunque ha per valore un numero commensurabile.

La reciproca di questa proposizione è altresì vera; cioè *un numero commensurabile è uguale ad una frazione continua finita.*

Sia $\frac{B}{A}$ una frazione irriduttibile e indichiamo con a_0, a_1, a_2,.... i quozienti, e con r_1, r_2, r_3, ... i resti successivi che si trovano cercando il massimo comun divisore fra B, A. Dall' Aritme-

tica è noto che queste quantità sono limitate di numero, e che l'ultimo resto r_m è uguale a 1; quindi avremo

$$B = A\,a_0 + r_1\,,$$

$$A = r_1\,a_1 + r_2\,,$$

$$r_1 = r_2\,a_2 + r_3\,,$$

$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\,,$$

$$r_{m-2} = r_{m-1}\,a_{m-1} + 1.$$

Da queste eguaglianze, facendo per semplicità $r_{m-1} = a_m$, si ricava

$$\frac{B}{A} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cdots + \cfrac{1}{a_{m-1} + \cfrac{1}{a_m}}}}\,;$$

lo che dimostra il teorema.

294. Le due formole

$$P_m = a_m\,P_{m-1} + b_m\,P_{m-2}\,, \tag{4}$$

$$Q_m = a_m\,Q_{m-1} + b_m\,Q_{m-2}\,, \tag{5}$$

servono per determinare successivamente le quantità P e Q. Ma P_m e Q_m si possono esprimere in funzione delle a e delle b indipendentemente dalla conoscenza delle ridotte precedenti, col seguente metodo suggerito da Stern.

Sommiamo il prodotto

$$a_2\,a_3\,a_4\,\ldots\ldots\,a_{m-1}\,a_m\,b_1\,,$$

con quello che ne risulta sostituendo b_2 in luogo di $a_2\,a_3$; all'espressione così ottenuta

$$a_2\,a_3\,a_4\ldots\ldots a_{m-1}\,a_m\,b_1 + a_4\,a_5\ldots\ldots a_{m-1}\,a_m\,b_2\,b_1\,,$$

aggiungiamo quella che ne risulta sostituendo b_4 invece di $a_3\, a_4$; alla nuova somma

$$\begin{aligned} & a_2\, a_3\, a_4 \ldots . a_{m-1}\, a_m\, b_1 \\ + & a_4\, a_5 \ldots \; a_{m-1}\, a_m\, b_3\, b_1 \\ + & a_2\, a_5 \ldots . a_{m-1}\, a_m\, b_4\, b_1\,, \end{aligned}$$

aggiungiamo quella che se ne deduce ponendo b_5 invece di $a_4\, a_5$, e procediamo a questo modo sino a che avremo esauriti tutti gli elementi a del prodotto iniziale. L'ultima somma è P_m. Così per es.: se $m = 5$, avremo successivamente

$$\begin{aligned} & a_2\; a_3\; a_4\; a_5\; b_1 \\ + & a_4\; a_5\; b_3\; b_1 \\ + & a_2\; a_5\; b_4\; b_1 \\ + & a_2\; a_3\; b_5\; b_1 \\ & + b_3\; b_5\; b_1. \end{aligned}$$

Se indichiamo con $[a_2\, a_3 \ldots . a_m\, b_1]$, l'espressione formata col metodo precedente, è chiaro che questa somma è composta di due parti, una delle quali è moltiplicata per a_m, e l'altra per b_m; la prima è $[a_2\, a_3 \ldots a_{m-1}\, b_1]$, e la seconda $[a_2\, a_3 \ldots a_{m-2}\, b_1]$; in guisa che avremo

$$[a_2\, a_3 \ldots . a_m\, b_1] = a_m\, [a_2\, a_3 \ldots . a_{m-1}\, b_1] + b_m\, [a_2\, a_3 \ldots a_{m-2}\, b_1]\,,$$

formola interamente analoga alla (4). Ora facilmente si verifica che $[a_2\, a_3\, b_1] = P_3$; dunque in generale

$$[a_2\, a_3 \ldots . a_m\, b_1] = P_m.\ (^*)$$

(*) Questa regola per formare P_m equivale a dire che P_m è la parte intera nel prodotto

$$a_2\, a_3 \ldots . a_m\, b_1 \left(1 + \frac{b_3}{a_2\, a_3}\right)\left(1 + \frac{b_4}{a_3\, a_4}\right) \ldots . \left(1 + \frac{b_m}{a_{m-1}\, a_m}\right).$$

Per ottenere Q_m basta operare in un modo analogo sopra il prodotto $a_1, a_2 \ldots\ldots a_m$, e si trova

$$[a_1\, a_2 \ldots\ldots a_m] = Q_m.$$

Se la frazione continua fosse della forma

$$a_0 + \cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \cdots}} \tag{6}$$

si verifica facilmente che

$$P_m = [a_0\, a_1 \ldots\ldots a_m]\ ,$$
$$Q_m = [a_1\, a_2 \ldots\ldots a_m]\ .$$

295. Per la frazione continua (a_1, a_n) si ha

$$p_m = [a_2\, a_3 \ldots\ldots a_m]\ ,$$
$$q_m = [a_1\, a_2 \ldots\ldots a_m]\ ,$$

ove bisogna aver presente che per $a_1\, a_2,\ a_2\, a_3, \ldots.$ si deve sostituire sempre 1.

In questa ipotesi giova osservare che p_m conterrà la somma $a_2 + a_4 + a_6 + \cdots$ se m è un numero pari, e se m è dispari conterrà un termine eguale a 1. Per q_m si verifica una legge contraria; se m è dispari q_m conterrà la somma $a_1 + a_3 + a_5 + \cdots$, e se m è pari conterrà un termine eguale a 1.

Esempio.

$$p_4 = a_2\, a_3\, a_4 + a_2 + a_4\ ,$$

$$p_5 = a_2\, a_3\, a_4\, a_5 + a_4\, a_5 + a_2\, a_5 + a_2\, a_3 + 1\ ,$$

$$q_3 = a_1\, a_2\, a_3 + a_1 + a_3\ ,$$

$$q_4 = a_1\, a_2\, a_3\, a_4 + a_3\, a_4 + a_1\, a_4 + a_1\, a_2 + 1.$$

Del resto supposto verificata questa legge sino a un certo in-

dice, si dimostra facilmente per gl'indici seguenti mediante le formole

$$(7)\quad \begin{cases} p_m = a_m\, p_{m-1} + p_{m-2}\,, \\ q_m = a_m\, q_{m-1} + q_{m-2}\,, \end{cases}$$

che si deducono dalle (4) e (5) facendo $b_m = 1$.

Infatti supponiamo che si sia trovato

$$p_{2m-1} = A + 1\,,$$
$$p_{2m} = B + a_2 + a_4 + \cdots + a_{2m}\,;$$

avremo

$$p_{2m+1} = a_{2m+1}\, p_{2m} + p_{2m-1}$$
$$= a_{2m+1}\,(B + a_2 + a_4 + \cdots + a_{2m}) + A + 1$$
$$= A_1 + 1\,,$$

facendo

$$A_1 = A + a_{2m+1}\,(B + a_2 + a_4 + \cdots + a_{2m}).$$

Parimente

$$p_{2m+2} = a_{2m+2}\, p_{2m+1} + p_{2m}$$
$$= a_{2m+2}\,(A_1 + 1) + B + a_2 + a_4 + \cdots + a_{2m}$$
$$= B_1 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{2m+2}\,,$$

facendo

$$B_1 = B + a_{2m+2}\,(A_1 + 1).$$

La stessa dimostrazione si applica a q_m.

296. Le quantità p_m e q_m si possono ottenere per un'altra via, utile a conoscere, perchè dà il modo di determinare a priori il numero dei termini che contiene il numeratore e il denominatore di ciascuna ridotta. Per procedere chiaramente osserviamo che le combinazioni senza ripetizione si possono ottenere nel seguente modo. Consideriamo p. es. le combinazioni della 4ª classe colle sei lettere $a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7$. Scriviamo il gruppo formato

dalle prime quattro lettere e tutti quelli che se ne deducono aumentando successivamente di una unità l'indice dell'ultimo elemento a_5; avremo

$$(a) \quad \left\{ \begin{array}{l} a_2\, a_3\, a_4\, a_5\,, \\ a_2\, a_3\, a_4\, a_6\,, \\ a_2\, a_3\, a_4\, a_7\,. \end{array} \right.$$

Da questi gruppi ne possiamo dedurre due soli aumentando di una unità l'indice di a_4, e sono

$$(b) \quad \left\{ \begin{array}{l} a_2\, a_3\, a_5\, a_6\,, \\ a_2\, a_3\, a_5\, a_7\,. \end{array} \right.$$

L'ultimo fra i gruppi precedenti è il solo nel quale l'indice della penultima lettera può essere aumentato di una unità; lo che ci darà il nuovo gruppo

$$(c) \quad a_2\, a_3\, a_6\, a_7\,.$$

I soli gruppi (b) e (c) sono capaci di ricevere un aumento nell'indice di a_3, ed avremo

$$(d) \quad \left\{ \begin{array}{l} a_2\, a_4\, a_5\, a_6\,, \\ a_2\, a_4\, a_5\, a_7\,, \\ a_2\, a_4\, a_6\, a_7\,; \end{array} \right.$$

e questi non danno che un solo gruppo accrescendo l'indice di a_4 di una unità, che è

$$(e) \quad a_2\, a_5\, a_6\, a_7\,.$$

Fra tutti i gruppi che abbiamo scritto, gli ultimi quattro sono i soli che ce ne possono dare dei nuovi aumentando l'indice di a_2, che sono

$$\begin{array}{l} a_3\, a_4\, a_5\, a_6\,, \\ a_3\, a_4\, a_5\, a_7\,, \\ a_3\, a_4\, a_6\, a_7\,, \\ a_3\, a_5\, a_6\, a_7\,; \end{array}$$

i quali danno un solo nuovo gruppo

$$a_4\, a_5\, a_6\, a_7\,.$$

I 15 gruppi che abbiamo ottenuto, sono i soli che si possono formare colle lettere proposte combinate 4 a 4.

Ora se noi al primo gruppo $a_2\ a_3\ a_4\ a_5$ applichiamo la medesima legge, colla sola differenza di aumentare gl'indici sempre di due unità, otterremo i 5 gruppi

$$a_2\ a_3\ a_4\ a_5\ ,$$
$$a_2\ a_3\ a_4\ a_7\ ,$$
$$a_2\ a_3\ a_5\ a_7\ ,$$
$$a_2\ a_3\ a_6\ a_7\ ,$$
$$a_4\ a_5\ a_6\ a_7\ .$$

In generale è evidente che mentre nel primo caso, m essendo le lettere e n quelle contenute in ciascun gruppo, il numero dei gruppi è dato da m_n, nel secondo caso è dato da $\left(\frac{n+m}{2}\right)_m$. Nel secondo caso si suppone sempre che i numeri n ed m sieno della stessa specie, cioè entrambi dispari o entrambi pari, in guisa che $n+m$ sarà sempre un numero pari.

Ciò posto, prendiamo p. es. il valore di p_7, e scriviamolo nel seguente modo:

$$\begin{aligned} p_7 = a_2\ a_3\ a_4\ a_5\ a_6\ a_7 &+ a_2\ a_3\ a_4\ a_5 + a_2\ a_3 + 1 \\ &+ a_2\ a_3\ a_4\ a_7 + a_2\ a_5 \\ &+ a_2\ a_6\ a_5\ a_7 + a_2\ a_7 \\ &+ a_2\ a_3\ a_6\ a_7 + a_4\ a_5 \\ &+ a_4\ a_5\ a_6\ a_7 + a_4\ a_7 \\ &\qquad\qquad\quad + a_6\ a_7. \end{aligned}$$

È facile verificare che i gruppi contenuti nella seconda e terza colonna sono formati per l'appunto nel secondo dei modi indicati innanzi. La stessa legge si verifica per q_7; in guisa che potremo scrivere

$$p_7 = [a_2, a_7]_6 + [a_2, a_7]_4 + [a_2, a_7]_2 + [a_2, a_7]_0\ ,$$
$$q_7 = [a_1, a_7]_7 + [a_1, a_7]_5 + [a_1, a_7]_3 + [a_1, a_7]_1\ ;$$

gl'indici posti accanto alle parentesi indicano quante lettere contiene ciascun gruppo.

In generale faremo

$$p_{2n-1} = [a_2, a_{2n-1}]_{2n-2} + [a_2, a_{2n-1}]_{2n-4} + \cdots + [a_2, a_{2n-1}]_0 ,$$
$$q_{2n-1} = [a_1, a_{2n-1}]_{2n-1} + [a_1, a_{2n-1}]_{2n-3} + \cdots + [a_1, a_{2n-1}]_1 ,$$
$$p_{2n} = [a_2, a_{2n}]_{2n-1} + [a_2, a_{2n}]_{2n-3} + \cdots + [a_2, a_{2n}]_1 ,$$
$$q_{2n} = [a_1, a_{2n}]_{2n} + [a_1, a_{2n}]_{2n-2} + \cdots + [a_1, a_{2n}]_0 .$$

L'espressione

$$[a_1, a_{2n-1}]_{2m-1} ,$$

conterrà

$$(n+m-1)_{2m-1} ,$$

termini; l'espressione

$$[a_2, a_{2n-1}]_{2m-2} ,$$

ne conterrà

$$(n+m-2)_{2m-2} .$$

Se la ridotta è d'indice pari, la quantità

$$[a_1, a_{2n}]_{2m} ,$$

avrà

$$(n+m)_m ,$$

termini, e la quantità

$$[a_2, a_{2n}]_{2m-1} ,$$

ne conterrà

$$(n+m-1)_{2m-1} .$$

In generale si vede che le quantità che formano il numeratore della ridotta n^{esima} contengono successivamente

$$1 , (n-2)_1 , (n-3)_2 , (n-4)_3 , \ldots .$$

termini, e quelle che formano il denominatore corrispondente ne contengono

$$1 , (n-1)_1 , (n-2)_2 , (n-3)_3 , \ldots .$$

297. *Il numeratore e il denominatore della ridotta* $\left(\frac{b_1}{a_1}, \frac{b_m}{a_m}\right)$ *sono i denominatori rispettivi delle ridotte*

$$\left(\frac{1}{a_m}, \frac{b_m}{a_{m-1}}, \ldots . \frac{b_3}{a_2}\right),$$

$$\left(\frac{1}{a_m}, \frac{b_m}{a_{m-1}}, \ldots . \frac{b_2}{a_1}\right).$$

Infatti dall' equazioni

$$P_m = a_m P_{m-1} + b_m P_{m-2},$$

$$P_{m-1} = a_{m-1} P_{m-2} + b_{m-1} P_{m-3},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$P_3 = a_3 P_2 + b_3 P_1,$$

$$P_2 = a_2 P_1,$$

si deduce

$$\frac{P_{m-1}}{P_m} = \left(\frac{1}{a_m}, \frac{b_m}{a_{m-1}}, \ldots . \frac{b_3}{a_2}\right). \tag{8}$$

Parimente dall' equazioni

$$Q_m = a_m Q_{m-1} + b_m Q_{m-2},$$

$$Q_{m-1} = a_{m-1} Q_{m-2} + b_{m-1} Q_{m-3},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$Q_3 = a_3 Q_2 + b_3 Q_1,$$

$$Q_2 = a_2 Q_1 + b_2,$$

$$Q_1 = a_1,$$

si ricava

$$\frac{Q_{m-1}}{Q_m} = \left(\frac{1}{a_m}, \frac{b_m}{a_{m-1}}, \ldots . \frac{b_2}{a_1}\right). \tag{9}$$

298. Se $b_1 = 1$, e $b_2 = b_3 = \cdots = +1$, le due formole precedenti diventano

$$\frac{p_{m-1}}{p_m} = (a_m, a_2), \frac{q_{m-1}}{q_m} = (a_m, a_1), \tag{10}$$

la seconda delle quali mostra che il denominatore della ridotta (a_1, a_m), non cambia di valore invertendo l'ordine dei termini.

Dall'equazioni (10) si deduce un'altra relazione interessante. Infatti si ha

$$\frac{p_m}{q_m} \cdot \frac{p_{m-1}}{p_m} = \frac{p_{m-1}}{q_m} = (a_1, a_m)(a_m, a_2),$$

$$\frac{p_{m-1}}{q_{m-1}} \cdot \frac{q_{m-1}}{q_m} = \frac{p_{m-1}}{q_m} = (a_1, a_{m-1})(a_m, a_1);$$

da cui

$$(a_1, a_m)(a_m, a_2) = (a_1, a_{m-1})(a_m, a_1). \tag{11}$$

Avendo riguardo alla seconda delle (10), dall'identità

$$\frac{1}{q_m} = \frac{q_{m-1}}{q_m} \cdot \frac{q_{m-2}}{q_{m-1}} \cdots \frac{q_2}{q_3} \cdot \frac{q_1}{q_2} \cdot \frac{q_0}{q_1},$$

si deduce

$$\frac{1}{q_m} = (a_m, a_1)(a_{m-1}, a_1) \cdots (a_3, a_1)(a_2, a_1)(a_1).$$

Ma q_m non cambia di valore invertendo l'ordine degli elementi, quindi

$$\left\{ \begin{aligned} &(a_1, a_m)(a_2, a_m) \cdots (a_{m-2}, a_m)(a_{m-1}, a_m)(a_m) \\ &= (a_m, a_1)(a_{m-1}, a_1) \cdots (a_3, a_1)(a_2, a_1)(a_1). \end{aligned} \right. \tag{12}$$

299. Poniamo

$$\Delta_m = \frac{P_{m+1}}{Q_{m+1}} - \frac{P_m}{Q_m},$$

e sostituiamo per $\frac{P_{m+1}}{Q_{m+1}}$ il valore corrispondente; riducendo si trova con facilità

$$\Delta_m = -\frac{b_{m+1} Q_{m-1}}{Q_{m+1}} \Delta_{m-1}.$$

Se moltiplichiamo questa formola per tutte quelle che se ne deducono sostituendo successivamente $m-1, m-2, \ldots 3, 2$ per m, troveremo

$$(13) \qquad \Delta_m = \frac{P_{m+1}}{Q_{m+1}} - \frac{P_m}{Q_m} = (-1)^m \frac{b_1 b_2 \ldots b_{m+1}}{Q_m Q_{m+1}},$$

da cui

$$(14) \qquad P_{m+1} Q_m - P_m Q_{m+1} = (-1)^m b_1 b_2 \ldots b_{m+1}.$$

Se indichiamo con n un numero intero minore di m e facciamo

$$\frac{p}{q} = a_{n+1} + \left(\frac{b_{n+2}}{a_{n+2}}, \ldots \frac{b_m}{a_m}\right),$$

è chiaro che per passare dalla ridotta $\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}$ all'altra $\frac{P_m}{Q_m}$, basta sostituire nella prima $\frac{p}{q}$ invece di a_{n+1}; quindi avremo

$$\frac{P_m}{Q_m} = \frac{\frac{p}{q} P_n + b_{n+1} P_{n-1}}{\frac{p}{q} Q_n + b_{n+1} Q_{n-1}},$$

e sottraendo $\frac{P_n}{Q_n}$ dai due membri

$$\frac{P_m}{Q_m} - \frac{P_n}{Q_n} = -\frac{q\, b_{n+1} (P_n Q_{n-1} - P_{n-1} Q_n)}{Q_n Q_m},$$

ovvero per la (14)

$$(15) \qquad \frac{P_m}{Q_m} - \frac{P_n}{Q_n} = (-1)^n \frac{q\, b_1 b_2 \ldots b_{n+1}}{Q_n Q_m}.$$

da cui

$$(16)\qquad P_m Q_n - P_n Q_m = (-1)^n q\, b_1 b_2 \dots b_{n+1}.$$

300. Per la frazione continua $(a_1, a_2, \dots)$, il valore di $\frac{P_m}{Q_m}$ trovato nel n° precedente, diventa

$$\frac{p_m}{q_m} = \frac{p\, p_n + q\, p_{n-1}}{p\, q_n + q\, q_{n-1}},$$

ovvero

$$(a_1, a_m) = \frac{[a_2 \dots a_n][a_{n+1} \dots a_m] + [a_2 \dots a_{n-1}][a_{n+2} \dots a_m]}{[a_1 \dots a_n][a_{n+1} \dots a_m] + [a_1 \dots a_{n-1}][a_{n+2} \dots a_m]}.$$

Parimente si ha

$$\frac{p_m}{q_m} - \frac{p_n}{q_n} = -\frac{q\, q_{n-1}}{q_m}\left[\frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right],$$

ovvero

$$(a_1, a_m) - (a_1, a_n) = -\frac{q\, q_{n-1}}{q_m}\left[(a_1, a_n) - (a_1, a_{n-1})\right];$$

ma

$$q_{n-1} = [a_1 \dots a_n](a_n, a_1),\quad q = [a_{n+2} \dots a_m] = [a_{n+1} \dots a_m](a_{n+1} \dots a_m);$$

quindi

$$\frac{q\, q_{n-1}}{q_m} = \frac{(a_n, a_1)(a_{n+1}, a_m)}{\dfrac{q_m}{[a_1 \dots a_n][a_{n+1} \dots a_m]}};$$

e poichè

$$q_m = [a_1 \dots a_m] = [a_1 \dots a_n][a_{n+1} \dots a_m] + [a_1 \dots a_{n-1}][a_{n-2} \dots a_m],$$

avremo

$$\frac{q\, q_{n-1}}{q_m} = \frac{(a_n, a_1)(a_{n+1}, a_m)}{1 + (a_n, a_1)(a_{n+1}, a_m)},$$

e per conseguenza

$$(a_1, a_m)-(a_1, a_n)=-\frac{(a_n, a_1)(a_{n+1}, a_m)}{1+(a_n, a_1)(a_{n+1}, a_m)}[(a_1, a_n)-(a_1, a_{n-1})].$$

301. Se nella formola (13) poniamo per m successivamente $m-1$, $m-2$, ... 2, 1, avremo l'eguaglianze

$$\frac{P_m}{Q_m}-\frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}}=(-1)^{m-1}\frac{b_1 b_2 \ldots . b_m}{Q_{m-1} Q_m},$$

$$\frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}}-\frac{P_{m-2}}{Q_{m-2}}=(-1)^{m-2}\frac{b_1 b_2 \ldots . b_{m-1}}{Q_{m-2} Q_{m-1}},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ,$$

$$\frac{P_3}{Q_3}-\frac{P_2}{Q_2}=\frac{b_1 b_2 b_3}{Q_2 Q_3},$$

$$\frac{P_2}{Q_2}-\frac{P_1}{Q_1}=-\frac{b_1 b_2}{Q_1 Q_2},$$

che sommate insieme danno

$$(17)\quad \frac{P_m}{Q_m}=\frac{b_1}{Q_1}-\frac{b_1 b_2}{Q_1 Q_2}+\frac{b_1 b_2 b_3}{Q_2 Q_3}-\ldots.+(-1)^{m-1}\frac{b_1 b_2 \ldots . b_m}{Q_{m-1} Q_m}.$$

Se la frazione continua è della forma

$$\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_2}+\frac{1}{h_3}+\ddots,$$

la formola precedente diventa

$$(18)\quad \frac{p_m}{q_m}=\frac{1}{q_1}-\frac{1}{q_1 q_2}+\frac{1}{q_2 q_3}-\ldots.+(-1)^{m-1}\frac{1}{q_{m-1} q_m}.$$

Giova osservare che se facciamo

$$h_{2m+1}=\frac{a_{2m+1} b_{2m} \ldots . b_2}{b_{2m+1} b_{2m-1} \ldots . b_1},$$

$$h_{2m}=\frac{a_{2m} b_{2m-1} \ldots . b_1}{b_{2m} b_{2m-2} \ldots . b_2},$$

la frazione continua $(h_1, h_2, \ldots)$ è equivalente alla frazione continua $\left(\frac{b_1}{a_1}, \frac{b_2}{a_2}, \ldots\right)$; quindi in questa ipotesi l'equazioni (17) e (18) esprimono la medesima cosa sotto forma differente.

302. Le formole che abbiamo dato sinora sono generali, qualunque sia il segno delle quantità che compongono la frazione continua proposta. Nel caso particolare in cui tanto le quantità a, quanto le b sono tutte positive, dall'equazioni precedenti si deducono le seguenti conseguenze.

Le differenze Δ *formano una serie decrescente e sono alternativamente negative e positive; negative quelle con indici dispari, positive le altre.*

Le ridotte con indice pari formano una serie crescente; le ridotte con indice dispari formano una serie decrescente; poichè dalla formola (15) apparisce manifesto che le prime ridotte sono minori, e le altre ridotte sono maggiori di tutte le ridotte seguenti.

Ogni ridotta è sempre compresa fra due ridotte consecutive con indice minore; poichè le due differenze

$$\frac{P_m}{Q_m} - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}, \quad \frac{P_m}{Q_m} - \frac{P_n}{Q_n},$$

hanno segni opposti.

Le ridotte delle frazioni continue che hanno tutti i numeratori parziali eguali a 1 *e i denominatori parziali numeri interi, sono frazioni irriduttibili.* Infatti in questo caso la formola (14) diventa

$$p_{m+1} q_m - p_m q_{m+1} = (-1)^m,$$

la quale mostra chiaramente che p_m e q_m, sono numeri primi fra di loro.

303. Consideriamo ora la frazione continua

$$N = \cfrac{b_1}{a_1 - \cfrac{b_2}{a_2 - \cfrac{b_3}{a_3 - \ddots}}},$$

ove $a_1, a_2, \ldots\, b_1, b_2, \ldots$ sono tutte quantità positive legate dalla relazione

$$a_m \geqq b_m + 1.$$

Per queste frazioni continue si ha il teorema:

Le ridotte della frazione continua N *sono tutte positive e minori dell'unità e formano una serie crescente.*

Nel caso presente si ha

$$P_m = a_m P_{m-1} - b_m P_{m-2}\,,$$
$$Q_m = a_m Q_{m-1} - b_m Q_{m-2}\,;$$

se supponiamo $c_m > 0$, potremo fare $a_m = b_m + c_m + 1$, in guisa che avremo

$$P_m = P_{m-1} + b_m (P_{m-1} - P_{m-2}) + c_m P_{m-1}\,,$$
$$Q_m = Q_{m-1} + b_m (Q_{m-1} - Q_{m-2}) + c_m Q_{m-1}.$$

Ma si ha

$$P_1 = b_1\,,\ P_2 = a_2 b_1\,,$$

quindi $P_2 > P_1$, e per la prima formola $P_m > P_{m-1}$; laonde le P formano una serie crescente e sono tutte positive.

Parimente si ha

$$Q_1 = a_1\,,\ Q_2 = a_1 a_2 - b_2 = a_1 + a_1 c_2 + (a_1 - 1) b_2\,,$$

e poichè a_1 è > 1, ne segue che $Q_2 > Q_1$; quindi dalla seconda formola risulta $Q_m > Q_{m-1}$; lo che mostra che anche le Q formano una serie crescente positiva.

Inoltre dalla formola

$$\frac{P_{m+1}}{Q_{m+1}} - \frac{P_m}{Q_m} = \frac{b_1 b_2 \ldots . b_{m+1}}{Q_m Q_{m+1}}\,,$$

risulta manifesto che le ridotte formano una serie crescente.

Finalmente osserviamo che dalle due eguaglianze

$$1 > \frac{b_m}{a_m} \text{ e } a_{m-1} > b_{m-1}\,,$$

si deduce

$$a_{m-1} > \frac{b_m}{a_m} + b_{m-1}\,,$$

da cui

$$1 > \cfrac{b_{m-1}}{a_{m-1} - \cfrac{b_m}{a_m}};$$

se a questa disuguaglianza aggiungiamo l'altra $a_{m-2} > b_{m-2}$, troveremo

$$a_{m-2} > \cfrac{b_{m-1}}{a_{m-1} - \cfrac{b_m}{a_m}} + b_{m-2},$$

da cui

$$1 > \cfrac{b_{m-2}}{a_{m-2} - \cfrac{b_{m-1}}{a_{m-1} - \cfrac{b_m}{a_m}}};$$

proseguendo a questo modo troveremo $\frac{P_m}{Q_m} < 1$; dunque tutte le ridotte sono minori dell'unità.

304. Se $a_n = b_n + 1$, si può trovare facilmente l'espressione generale di $\frac{P_m}{Q_m}$, in funzione delle a e delle b.

Infatti in questa ipotesi si ha

$$P_m - P_{m-1} = (P_{m-1} - P_{m-2}) b_m,$$
$$Q_m - Q_{m-1} = (Q_{m-1} - Q_{m-2}) b_m.$$

Se moltiplichiamo la prima formola con tutte quelle che se ne deducono sostituendo in essa $m-1$, $m-2$, ... 3, 2 per m, troveremo

$$P_m - P_{m-1} = b_1 b_2 \ldots . b_m;$$

e aggiungendo a questa formola tutte quelle corrispondenti ai valori $m-1$, $m-2$, ... 3, 2, di m, avremo

$$P_m = b_1 + b_1 b_2 + b_1 b_2 b_3 + \cdots + b_1 b_2 \ldots . b_m.$$

Operando in un modo analogo sopra la seconda equazione, otterremo

$$Q_m = 1 + b_1 + b_1 b_2 + \cdots + b_1 b_2 \ldots . b_m;$$

in guisa che

$$\frac{P_m}{Q_m} = \frac{b_1 + b_1 b_2 + \cdots + b_1 b_2 \ldots . b_m}{1 + b_1 + b_1 b_2 + \cdots + b_1 b_2 \ldots . b_m}.$$

305. Supponiamo che fra $n+2$ quantità $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_{n+1}$, sussistano le n equazioni lineari

$$(19)\quad \left\{\begin{aligned} \varphi_0 &= \mu_1 \varphi_1 + \nu_1 \varphi_2 , \\ \varphi_1 &= \mu_2 \varphi_2 + \nu_2 \varphi_3 , \\ &\ldots\ldots\ldots , \\ \varphi_{n-1} &= \mu_n \varphi_n + \nu_n \varphi_{n+1} ; \end{aligned}\right.$$

da queste equazioni si deduce

$$\frac{\varphi_1}{\varphi_0} = \cfrac{1}{\mu_1 + \cfrac{\nu_1}{\mu_2 + \cdots + \cfrac{\nu_{n-1}}{\mu_n + \cdots}}}$$

Ora conosciute le quantità che compongono questa frazione continua e le quantità φ, è facile ottenere tre equazioni lineari fra P_n, Q_n, P_{n-1}, Q_{n-1}, che possono servire utilmente per la determinazione di queste espressioni.

Dall'equazioni (19) si vede chiaramente che φ_0 si può esprimere linearmente in funzione di due φ consecutive; per trovare questa relazione, poniamo

$$\varphi_0 = A_n \varphi_n + \nu_n B_n \varphi_{n+1} ,$$

e cerchiamo il significato delle quantità A_n e B_n.

Combinando l'equazione

$$\varphi_0 = A_{n-1} \varphi_{n-1} + \nu_{n-1} B_{n-1} \varphi_n ,$$

con l'ultima delle (19), troveremo

$$\varphi_0 = (\mu_n A_{n-1} + \nu_{n-1} B_{n-1}) \varphi_n + \nu_n A_{n-1} \varphi_{n+1} ,$$

e quindi

$$A_n = \mu_n A_{n-1} + \nu_{n-1} B_{n-1} , \quad B_n = A_{n-1} ,$$

ovvero

$$A_n = \mu_n A_{n-1} + \nu_{n-1} A_{n-2} ,$$

relazione interamente analoga all'altra

$$Q_n = \mu_n Q_{n-1} + \nu_n Q_{n-2},$$

ove Q_n è il denominatore della ridotta $\left(\frac{1}{\mu_1}, \frac{\nu_1}{\mu_2}, \dots \frac{\nu_{n-1}}{\mu_n}\right)$. Se quindi osserviamo che $A_1 = Q_1$, $A_2 = Q_2$, si vede che in generale $A_n = Q_n$; in guisa che avremo

$$(20) \qquad \varphi_0 = Q_n \varphi_n + \nu_n Q_{n-1} \varphi_{n+1}.$$

In un modo interamente analogo, troveremo

$$(21) \qquad \varphi_1 = P_n \varphi_n + \nu_n P_{n-1} \varphi_{n+1},$$

ove P_n è il numeratore della ridotta $\left(\frac{1}{\mu_1}, \frac{\nu_1}{\mu_2}, \dots \frac{\nu_{n-1}}{\mu_n}\right)$.

Se ora dall'equazione (21) moltiplicata per Q_n togliamo l'equazione (20) moltiplicata per P_n, avremo

$$(22) \qquad \varphi_1 Q_n - \varphi_0 P_n = (-1)^n \nu_1 \nu_2 \dots \nu_n \varphi_{n+1},$$

avuto riguardo alla formola

$$P_n Q_{n-1} - P_{n-1} Q_n = (-1)^{n-1} \nu_1 \nu_2 \dots \nu_{n-1},$$

che è una conseguenza della (14).

Le formole (20), (21) e (22), sono quelle che cercavamo e di cui faremo uso in seguito.

Frazioni continue i cui termini sono tutti positivi.

306. Nel n° 302 abbiamo dimostrato che una ridotta qualunque $\frac{P_m}{Q_m}$ della frazione continua $\left(\frac{b_1}{a_1}, \frac{b_2}{a_2}, \dots\right)$, nell'ipotesi che tutte le quantità che la compongono sieno positive, è sempre compresa fra due ridotte consecutive; quindi è sempre compresa fra 0 e $\frac{b_1}{a_1}$. Da ciò segue che tanto le ridotte con indice pari, quanto quelle

con indice dispari, debbono convergere verso limiti finiti. Se questi limiti sono eguali, la frazione continua è *convergente* ed ha per *valore* questo limite comune. In questo caso si vede chiaramente che il valore della frazione continua è compreso fra due ridotte consecutive. Se le ridotte con indice dispari e quelle con indice pari convergono verso limiti differenti, la frazione continua è *indeterminata*.

Per vedere in quali casi la frazione continua converge, daremo due teoremi che sono sufficienti per un gran numero di casi.

307. *La frazione continua* $\left(\frac{b_1}{a_1}, \frac{b_2}{a_2}, \ldots\right)$ *è convergente, se si ha*

$$\lim_{n=\infty} \frac{a_{n+1}\, a_n}{b_{n+1}} > 0 ,$$

o anche se si ha

$$\lim \frac{a_{n+1}\, a_n}{b_{n+1}} = 0 ,$$

e la serie

$$(23) \qquad \frac{\alpha_{n+1}}{1+\alpha_{n+1}} + \frac{\alpha_{n+2}}{1+\alpha_{n+2}} + \cdots ,$$

ove $\alpha_{n+1} = \frac{a_{n+1}\, a_n}{b_{n+1}}$, *è divergente.*

Per dimostrare questo teorema ci gioveremo della formola (17), dalla quale si deduce

$$(24) \qquad \lim \frac{P_m}{Q_m} = \frac{b_1}{Q_1} - \frac{b_1 b_2}{Q_1 Q_2} + \frac{b_1 b_2 b_3}{Q_2 Q_3} - \cdots$$

Il primo membro di questa formola sarà una quantità finita e determinata, e per conseguenza la frazione continua sarà convergente, se è convergente la serie del secondo membro, cioè se il termine generale

$$u_n = \frac{b_1 b_2 \ldots b_n}{Q_{n-1}\, Q_n} ,$$

ha per limite zero. Per vedere quando si verifica questo caso, osserviamo che

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = b_{n+1} \frac{Q_{n-1}}{Q_{n+1}} = b_{n+1} \frac{Q_{n-1}}{a_{n+1}\, Q_n + b_{n+1}\, Q_{n-1}} ,$$

da cui

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < \frac{1}{1+\frac{a_{n+1}\,a_n}{b_{n+1}}}.$$

Se facciamo $\alpha_{n+1} = \frac{a_{n+1}\,a_n}{b_{n+1}}$, troveremo

$$u_{n+s} < \frac{1}{1+\alpha_{n+1}} \cdot \frac{1}{1+\alpha_{n+2}} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{1+\alpha_{n+s}}\, u_n\,,$$

ovvero

$$u_{n+s} < \left(1 - \frac{\alpha_{n+1}}{1+\alpha_{n+1}}\right)\left(1 - \frac{\alpha_{n+2}}{1+\alpha_{n+2}}\right) \ldots \left(1 - \frac{\alpha_{n+s}}{1+\alpha_{n+s}}\right) u_n.$$

Ma il prodotto

$$\left(1 - \frac{\alpha_{n+1}}{1+\alpha_{n+1}}\right)\left(1 - \frac{\alpha_{n+2}}{1+\alpha_{n+2}}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{\alpha_{n+s}}{1+\alpha_{n+s}}\right),$$

avrà, al crescere di s, per limite zero, se è divergente la serie (24); dunque la frazione continua proposta è convergente, se la serie (24) è divergente.

Ma questa serie è certamente divergente se si ha $lim\ \alpha_{n+1} > 0$, e può essere anche divergente se $lim\ \alpha_{n+1} = 0$; quindi si ha il teorema che abbiamo enunciato.

308. *La frazione continua* $\left(\frac{b_1}{a_1}, \frac{b_2}{a_2}, \ldots\right)$ *è convergente, se una almeno delle serie*

$$\frac{a_1}{b_1} + \frac{b_2}{b_1} \cdot \frac{a_3}{b_3} + \frac{b_2\,b_4}{b_1\,b_3} \cdot \frac{a_5}{b_5} + \ldots, \tag{25}$$

$$a_2\frac{b_1}{b_2} + a_4\frac{b_1\,b_3}{b_2\,b_4} + \ldots, \tag{26}$$

è divergente; è indeterminata, se entrambe queste serie sono convergenti.

Consideriamo l'equazione (18), da cui si ricava

$$lim\frac{P_m}{Q_m} = \frac{1}{q_1} - \frac{1}{q_1\,q_2} + \frac{1}{q_2\,q_3} - \ldots \tag{27}$$

Questa formola mostra manifestamente che la frazione continua proposta sarà convergente o indeterminata secondochè per $m=\infty$, la quantità $q_{m-1}\,q_m$ crescerà indefinitamente o tenderà verso una quantità finita.

Ora se m è pari (295), avremo

$$q_m = A+1\,,\; q_{m-1} = B+h_1+h_3+\cdots+h_{m-1}\,,$$

e se m è dispari

$$q_{m-1} = A+1\,,\; q_m = B+h_1+h_3+\cdots+h_m\,,$$

ove A e B sono quantità positive. Quindi il prodotto $q_m\,q_{m-1}$, sarà uguale nella prima ipotesi a

$$P+h_1+h_3+\cdots+h_{m-1}\,,$$

e nella seconda a

$$Q+h_1+h_3+\cdots+h_m\,,$$

P e Q essendo quantità positive.

Dunque $lim\ q_m\,q_{m-1}=\infty$ e la frazione continua è convergente se la serie

$$h_1+h_2+h_3+\cdots\,,$$

che equivale alla (24), è divergente.

Se applichiamo questo teorema alla frazione continua $(h_2, h_3, \ldots)$ che si deduce dalla frazione continua $(h_1, h_2, \ldots.)$ aumentando di 1 tutti gl'indici di h, allora invece della serie

$$h_1+h_3+\cdots\,,$$

avremo l'altra

$$h_2+h_4+\cdots\,,$$

che corrisponde alla (25), e quindi potremo dire.

La frazione continua $\left(\frac{b_1}{a_1}, \frac{b_2}{a_2}, \ldots\right)$ è convergente, se è divergente la serie

$$a_2 \cdot \frac{h_1}{b_2} + a_4 \cdot \frac{b_1 b_3}{b_2 b_4} + \cdots$$

Esaminiamo ora il caso in cui il prodotto $q_{m-1} q_m$ converge verso un limite finito. Le quantità q_{m-1} e q_m, sono entrambe maggiori della quantità positiva h_1, quindi non possono annullarsi, e per conseguenza ciascuna di esse dovrà convergere verso un limite finito maggiore di zero. Ora osserviamo che se si formano tutte le combinazioni senza ripetizione della 1^a, 2^a,..... m^{esima} classe degli elementi $h_1, h_2, \ldots h_m$, e se facciamo la somma di tutte queste combinazioni, q_m contiene solo una parte di questa somma, la quale è aumentata da 1 se m è pari. Quindi indicando con C_m questa somma, avremo qualunque sia m

$$q_m < C_m + 1 ,$$

o ciò ch'è lo stesso

$$q_m < (1 + h_1)(1 + h_2) \ldots (1 + h_m).$$

Il prodotto infinito

$$(1 + h_1)(1 + h_2) \ldots ,$$

è convergente insieme alla serie

$$h_1 + h_2 + h_3 + \cdots :$$

quindi se questa serie è convergente, q_m tende verso un limite finito. Ora affinchè questa serie sia convergente è necessario e sufficiente che sieno convergenti entrambe le serie (25) e (26); lo che dimostra la seconda parte del teorema,

Se osserviamo che il rapporto fra due termini consecutivi della serie (25) è

$$\frac{a_{2n+1} b_{2n}}{a_{2n-1} b_{2n+1}} ,$$

e quello relativo alla serie (26), è

$$\frac{a_{2n+2}\, b_{2n+1}}{a_{2n}\, b_{2n+2}}\;;$$

potremo dire che la frazione continua proposta è convergente, se una almeno di queste quantità ha un limite > 1; indeterminata se entrambe hanno limiti < 1.

Se entrambe queste quantità sono eguali all' unità, allora per un teorema già dimostrato (118), avremo che la frazione continua è convergente, se una delle quantità

$$\left[n-(n+1)\frac{b_{2n+1}\, a_{2n-1}}{b_{2n}\, a_{2n+1}}\right],\ \left[n-(n+1)\frac{b_{2n+2}\, a_{2n}}{b_{2n+1}\, a_{2n+2}}\right],$$

ha un limite < 0; indeterminata se entrambe hanno limiti > 0.

Esempii. 1°. La frazione continua

$$\frac{1}{1}+\frac{2}{1}+\frac{3}{1}+\cdots,$$

è convergente. Infatti in questo caso le a sono tutte eguali a 1 e $b_n = n$; in guisa che si ha

$$lim\left[n-(n+1)\frac{b_{2n+1}\, a_{2n-1}}{b_{2n}\, a_{2n+1}}\right] = -\,lim\,\frac{3n+1}{2n} = -\frac{3}{2}.$$

2°. La frazione continua

$$\frac{1\,.\,3}{1}+\frac{3\,.\,5}{1}+\frac{5\,.\,7}{1}+\cdots,$$

è convergente. Infatti la serie (25) diventa

$$\frac{1}{1\,.\,3}+\frac{3\,.\,5}{1\,.\,3\,.\,5\,.\,7}+\frac{3\,.\,5\,.\,7\,.\,9}{1\,.\,3\,.\,5\,.\,7\,.\,9\,.\,11}+\cdots$$
$$=\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}+\cdots,$$

che è divergente (86).

3°. La frazione continua

$$\frac{2}{1}+\frac{1}{1}+\frac{4}{1}+\frac{3}{1}+\frac{6}{1}+\frac{5}{1}+\cdots,$$

è convergente, poichè la serie

$$2+\frac{2.4}{1.3}+\frac{2.4.6}{1.3.5}+\cdots,$$

corrispondente alla (26) è divergente, avendo tutti i termini maggiori di 1.

4°. La frazione continua

$$1+\frac{2}{1}+\frac{2^3}{1}+\frac{2^6}{1}+\frac{2^{10}}{1}+\cdots,$$

è indeterminata, perchè le due serie

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^9}+\cdots,$$

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^6}+\frac{1}{2^{12}}+\cdots,$$

sono entrambe convergenti.

Se la frazione continua è

$$1+\frac{2}{1}+\frac{2^2}{1}+\frac{2^3}{1}+\cdots,$$

le serie (25) e (26) diventano

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots,$$

che è convergente; dunque la frazione continua è indeterminata.

Da ciò che precede segue altresì che la frazione continua

$$a+\cfrac{\alpha}{a+\cfrac{\alpha^2}{a+\cfrac{\alpha^3}{a+\cdots}}},$$

è indeterminata o convergente, secondochè x è maggiore non maggiore di 1. [1]

Ora passiamo a dimostrare varii teoremi di molta importanza nella teoria delle frazioni continue.

309. *Se la frazione continua*

$$N=\left(\frac{b_1}{a_1},\frac{b_2}{a_2},\ldots\right),$$

è convergente e se le a *soddisfano alla relazione* $a_m \geq 1$, *e tutte le frazioni parziali sono quantità non maggiori dell'unità; ogni ridotta è più vicina al valore* N *della frazione continua della ridotta precedente.*

Facciamo

$$R_m=\left(\frac{b_{m+1}}{a_{m+1}},\frac{b_{m+2}}{a_{m+2}},\ldots\right);$$

sarà R_m una frazione continua convergente, poichè altrimenti N non potrebbe essere una frazione continua convergente.

Procedendo come nel teorema precedente, troveremo

$$N=\frac{P_m+P_{m-1}R_m}{Q_m+Q_{m-1}R_m},$$

da cui

$$N-\frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}}=\frac{P_mQ_{m-1}-Q_mP_{m-1}}{Q_{m-1}(Q_m+Q_{m-1}R_m)},$$

$$N-\frac{P_m}{Q_m}=-\frac{(P_mQ_{m-1}-Q_mP_{m-1})R_m}{Q_m(Q_m+Q_{m-1}R_m)}.$$

---

[1] *Stern–Ueber die Kennzeichen der Convergenz eines Kettenbruchs,* nel vol. 37 del *Giornale di Crelle,* e *Algebraischen Analysis.*

Ma poichè a_m non è minore di 1, si ha

$$Q_m = a_m Q_{m-1} + b_m Q_{m-2} > Q_{m-1}.$$

Inoltre le frazioni parziali essendo tutte non maggiori di 1, dev'essere $R_m < 1$; quindi astrazion fatta dal segno, avremo

$$N - \frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}} > N - \frac{P_m}{Q_m}:$$

la quale disuguaglianza dimostra il teorema.

310. *Una ridotta qualunque si approssima al valore della frazione continua* $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$, *ove* $a_1, a_2, \ldots$ *sono numeri interi e positivi, più di ogni altra frazione che abbia i termini più semplici.*

Cominciamo dall'avvertire che la frazione continua $(a_1\ a_2, a_3, \ldots)$ è convergente, poichè la serie

$$a_1 + a_2 + a_3, \ldots,$$

è divergente, e si ha $a_m \geq 1$.

Inoltre osserviamo che un numero che si approssima al valore di una frazione continua più di una ridotta qualunque, vi si approssimerà a più forte ragione più della ridotta precedente; ma il valore della frazione continua è compreso fra queste due ridotte; dunque il numero di cui è parola deve altresì esser compreso fra le medesime ridotte.

Ciò posto, indichiamo con $\frac{R}{S}$ una frazione che si approssimi al valore della frazione continua $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$, più della ridotta $\frac{p_m}{q_m}$. In virtù dell'osservazione precedente la differenza $\frac{R}{S} - \frac{p_{m-1}}{q_{m-1}}$ dovrà essere minore in valore assoluto della differenza $\frac{p_m}{q_m} - \frac{p_{m-1}}{q_{m-1}}$, cioè astrazion fatta dal segno, deve aversi

$$\frac{R q_{m-1} - S p_{m-1}}{S} < \frac{1}{q_m}.$$

Ma $R q_{m-1} - S p_{m-1}$ essendo differenza di due numeri interi, non può essere minore di 1; quindi dovrà essere $S > q_m$.

Parimente la frazione $\frac{S}{R}$ essendo compresa fra $\frac{q_{m-1}}{p_{m-1}}$ e $\frac{q_m}{p_m}$, si troverà in modo analogo

$$\frac{S p_{m-1} - R q_{m-1}}{R} < \frac{1}{p_m},$$

da cui

$$R > p_m.$$

311. *L'espressione*

$$p_n - q_n N,$$

ove $\frac{p_n}{q_n}$ *è una ridotta della frazione continua*

$$N = (a_1, a_2, a_3, \ldots .),$$

i cui termini sono numeri interi e positivi, aumenta di valore ponendo per p_n *un numero qualunque minore di* p_{n+1} *e per* q_n *un numero minore di* q_{n+1}.

Se poniamo

$$r_m = a_m + (a_{m+1}, a_{m+2}, \ldots .),$$

avremo

$$N = \frac{p_m r_{m+1} + p_{m-1}}{q_m r_{m+1} + q_{m-1}};$$

e togliendo dai due membri la frazione $\frac{p_m}{q_m}$,

$$N - \frac{p_m}{q_m} = (-1)^m \frac{1}{q_m (q_m r_{m+1} + q_{m-1})}.$$

Da questa formola si deduce

$$\frac{p_m - q_m N}{p_{m-1} - q_{m-1} N} = -\frac{q_{m-2} + q_{m-1} r_m}{q_{m-1} + q_m r_{m+1}}.$$

Ma si ha

$$q_{m-1}+q_m r_{m+1}=(1+a_m r_{m+1})q_{m-1}+q_{m-2}r_{m+1},$$

$$1+a_m r_{m+1}=r_m r_{m+1};$$

quindi

$$\frac{q_{m-2}+q_{m-1}r_m}{q_{m-1}+q_m r_m}=\frac{1}{r_{m+1}}<1;$$

e per conseguenza, astrazion fatta dal segno,

$$p_m-q_m N<p_{m-1}-q_{m-1}N.$$

Ciò posto, indichiamo con q e p due numeri primi fra di loro, tali che si abbia

$$q<q_{n+1},\ p<p_{n+1},$$

e facciamo

$$P=p_{n+1}q-q_{n+1}p,$$

$$Q=p_n q-q_n p.$$

Ricavando da queste formole i valori di p e di q, troveremo

$$p=(-1)^m(Pp_n-Qp_{n+1}),$$

$$q=(-1)^m(Pq_n-Qq_{n+1}).$$

La seconda eguaglianza mostra che P e Q debbono avere lo stesso segno, poichè $q<q_{n+1}$.

Ora si ha

$$p-qN=(-1)^m[P(p_n-q_nN)-Q(p_{n+1}-q_{n+1}N)];$$

inoltre le quantità

$$P(p_n-q_nN)$$

$$-Q(p_{n+1}-q_{n+1}N),$$

hanno lo stesso segno; dunque l'espressione

$$p-qN,$$

è maggiore delle due quantità

$$p_n - q_n N \text{ e } p_{n+1} - q_{n+1} N ;$$

lo che dimostra il teorema.

312. *Reciprocamente, se* α *e* β *sono due numeri positivi primi fra di loro, e se l'espressione*

$$\alpha - \beta N ,$$

cresce di valore sostituendo per α *e* β *due numeri rispettivamente minori,* $\frac{\alpha}{\beta}$ *è una ridotta della frazione continua*

$$N = (a_1, a_2, a_3, \ldots .) ,$$

ove $a_1, a_2, a_3, \ldots .$ *sono numeri interi e positivi.*

Infatti se $\frac{\alpha}{\beta}$ non è una ridotta, potremo sempre fare

$$p_n < \alpha < p_{n+1} ,$$

$$q_m < \beta < q_{m+1} .$$

Si possono dare tre casi: 1°. $m = n$; allora pel teorema precedente

$$p_n - q_n N < \alpha - \beta N.$$

2°. $q_{n+1} < \beta$. Allora $q_{m+1} > \beta > q_{n+1}$ e quindi $p_{m+1} > p_{n+1} > \alpha$,

e per lo stesso teorema

$$p_m - q_m N < \alpha - \beta N ;$$

e poichè $q_m < \beta$ anche $p_m < \alpha$.

3°. $q_{n+1} > \beta$ e quindi per lo stesso teorema

$$p_n - q_n N < \alpha - \beta N ,$$

e poichè $p_n < \alpha$, anche $q_n < \beta$.

Dunque si potrebbero sempre trovare due numeri rispetti-

vamente più piccoli di α e di β che renderebbero minore l'espressione $\alpha - \beta N$. [1]

313. Non solamente le ridotte godono la proprietà enunciata nel n° 310, ma anche altre frazioni che hanno i termini compresi fra quelli corrispondenti di due ridotte consecutive, e che per questa ragione si chiamano ridotte *intermedie*. Infatti indichiamo con n un numero intero minore di a_{2m} e formiamo la frazione

$$\frac{A_n}{B_n} = \frac{(a_{2m} - n)\, p_{2m-1} + p_{2m-2}}{(a_{2m} - n)\, q_{2m-1} + q_{2m-2}}.$$

Da questa formola si deducono le seguenti

$$\frac{A_n}{B_n} - \frac{p_{2m}}{q_{2m}} = -\frac{n}{B_n q_{2m}},$$

$$\frac{A_n}{B_n} - \frac{p_{2m-1}}{q_{2m-1}} = -\frac{1}{B_n q_{2m-1}},$$

$$\frac{A_n}{B_n} - \frac{p_{2m-2}}{q_{2m-2}} = \frac{a_{2m} - n}{B_n q_{2m-2}};$$

avvertendo che nella prima bisogna sostituire per $\frac{A_n}{B_n}$ e $\frac{p_{2m}}{q_{2m}}$ i loro valori, e nelle altre due va sostituito il solo valore di $\frac{A_n}{B_n}$.

Quindi avremo

$$\frac{A_n}{B_n} < \frac{p_{2m}}{q_{2m}},\ \frac{A_n}{B_n} < \frac{p_{2m-1}}{q_{2m-1}},\ \frac{A_n}{B_n} > \frac{p_{2m-2}}{q_{2m-2}},$$

e di più si vede che la frazione $\frac{A_n}{B_n}$ è irriduttibile.

Laonde la frazione $\frac{A_n}{B_n}$ essendo compresa fra le due ridotte $\frac{p_{2m}}{q_{2m}}$ e $\frac{p_{2m-2}}{q_{2m-2}}$ che sono entrambe minori del valore N della frazione continua, sarà pure minore di N. Ma $\frac{p_{2m-1}}{q_{2m-1}}$, ridotta con indice di-

---

[1] Il teorema (312) appartiene a Lagrange, che lo ha dato nelle *Addizioni all'Algebra* di Eulero. Il teorema (312) è di Sylvester.

spari, è maggiore di N; dunque N è compreso fra $\frac{p_{2m-1}}{q_{2m-1}}$ e $\frac{A_n}{B_n}$.

Da questa osservazione si deduce in un modo affatto analogo a quello che abbiamo adoperato precedentemente, che se $\frac{R}{S}$ è una frazione minore della frazione continua $(a_1, a_2, a_3, \ldots .)$, che è vicina a questo valore più della frazione $\frac{A_n}{B_n}$, i termini di $\frac{R}{S}$ debbono superare i termini corrispondenti di $\frac{A_n}{B_n}$.

Siccome ad n si possono dare i valori $1, 2, 3, \ldots . a_{2m} - 1$, si vede che avremo $a_{2m} - 1$ frazioni tutte comprese fra $\frac{p_{2m-2}}{q_{2m-2}}$ e $\frac{p_{2m}}{q_{2m}}$, minori del valore della frazione continua, e che godono, come le ridotte, della proprietà che si approssimano al valore della frazione continua più di qualunque altra frazione con termini minori, che sia più piccola di questo valore.

Delle frazioni analoghe si possono trovare fra due ridotte con indice dispari $\frac{p_{2m-1}}{q_{2m-1}}$ e $\frac{p_{2m+1}}{q_{2m+1}}$, facendo

$$\frac{C_n}{D_n} = \frac{(a_{2m+1} - n) p_{2m} + p_{2m-1}}{(a_{2m+1} - n) q_{2m} + q_{2m-1}}.$$

Di questa maniera troveremo altre $a_{2m+1} - 1$ frazioni comprese fra $\frac{p_{2m-1}}{q_{2m-1}}$ e $\frac{p_{2m+1}}{q_{2m+1}}$, tutte maggiori del valore della frazione continua, e che si approssimano a questo valore più di qualunque altra frazione maggiore di N, e che abbia i termini più piccoli.

Così per es. se convertiamo in frazione continua la frazione ordinaria $\frac{864}{209}$, troveremo

$$\frac{864}{209} = 4 + (7, 2, 6, 2).$$

Qui abbiamo

$$\frac{p_0}{q_0} = \frac{4}{1}, \frac{p_1}{q_1} = \frac{29}{7}, \frac{p_2}{q_2} = \frac{62}{15}, \frac{p_3}{q_3} = \frac{401}{97}, \frac{p_4}{q_4} = \frac{864}{209};$$

quindi fra $\frac{29}{7}$ e $\frac{401}{97}$ si possono inserire cinque frazioni intermedie

$$\frac{1\,.\,62+29}{1\,.\,15+7}=\frac{91}{22},\ \frac{2\,.\,62+29}{2\,.\,15+7}=\frac{153}{37},$$

$$\frac{3\,.\,62+29}{3\,.\,15+7}=\frac{215}{52},\ \frac{4\,.\,62+29}{4\,.\,15+7}=\frac{277}{67},$$

$$\frac{5\,.\,62+29}{5\,.\,15+7}=\frac{339}{82},$$

che sono tutte maggiori di $\frac{864}{209}$.

314. Da quel che precede si deduce una conseguenza importante.

Abbiamo veduto che le frazioni intermedie fra $\frac{p_{2m-1}}{q_{2m-1}}$ e $\frac{p_{2m+1}}{q_{2m+1}}$ e maggiori del valore N della frazione continua, si ottengono sostituendo nell'espressione

$$\frac{p_{2m+1}}{q_{2m+1}}=\frac{a_{2m+1}\,p_{2m}+p_{2m-1}}{a_{2m+1}\,q_{2m}+q_{2m-1}},$$

$a_{2m+1}-1$, $a_{2m+1}-2$, ... 3, 2, 1 in luogo di a_{2m+1}. Se ora nella medesima espressione sostituiamo

$$a_{2m+1}+1,\ a_{2m+1}+2,\ldots.\ a_{2m+1}+a_{2m+2}-1,$$

otterremo tutte le frazioni intermedie fra $\frac{p_{2m}}{q_{2m}}$ e $\frac{p_{2m+2}}{q_{2m+2}}$ e minori di N e così di seguito. Dunque è manifesto che se abbiamo una frazione della forma

$$\frac{n\,p_{2m}+p_{2m-1}}{n\,q_{2m}+q_{2m-1}},$$

e per n sostituiamo i numeri 1, 2, 3, ..., quando arriveremo ad un valore di n tale che la frazione corrispondente separi tutte quelle che sono maggiori di N da quelle che sono minori, questo valore di n è l'ultimo denominatore parziale corrispondente alla ridotta $\frac{p_{2m+1}}{q_{2m+1}}$.

315. I valori e le proprietà delle ridotte della frazione continua $(a_1, a_2, ...)$ si possono determinare geometricamente in un modo che per la sua semplicità merita di essere conosciuto.

Prendiamo nel piano due rette ortogonali Ox, Oy e sopra queste a partire dal punto O due serie indefinite di punti distanti ciascuno dal precedente della unità. Conduciamo per i medesimi altrettante parallele ad Oy e ad Ox rispettivamente; verremo così a formare una specie di *reticolo*, composto di un numero infinito di quadrati, i cui vertici diremo *nodi*.

Ciò posto, sia N una quantità di cui si vogliano determinare le ridotte. Sieno $\frac{p_1}{q_1}$ e $\frac{p_2}{q_2}$ le due prime ridotte. Conduciamo pel punto O, origine del reticolo, una retta OR che faccia coll'asse delle x un angolo la cui tangente trigonometrica sia eguale ad N.

Prendiamo il nodo P_1 che ha per coordinate (p_1, q_1) e il nodo P_2 che ha per coordinate (p_2, q_2). Conduciamo per P_1 una parallela a OP_2, la quale prima d'incontrare la retta OR passerà per n nodi: $p_1, p'_1, p''_1, \dots p_1^{(n-2)}, P_3$, e avremo

$$OP_2 = P_1 p_1 = p_1 p'_1 = p'_1 p''_1 = \cdots = p_1^{(n-2)} P_3.$$

Indicando con p_3 e q_3 le coordinate di P_3, dico che $\frac{p_3}{q_3}$ sarà la ridotta che segue immediatamente $\frac{p_2}{q_2}$. Infatti si ha

$$p_3 = n p_2 + p_1,$$

$$q_3 = n q_2 + q_1.$$

Ora osserviamo: 1°. che

$$\frac{p_3}{q_3} = \frac{n p_2 + p_1}{n q_2 + q_1} > N;$$

2°. Che sostituendo $n+1$ per n nel valore di $\frac{p_3}{q_3}$, otteniamo una nuova frazione minore di N.

3°. Che sostituendo per n successivamente

$$n-1, n-2, \ldots. 3, 2, 1,$$

otteniamo frazioni che si allontanano da N più di $\frac{p_2}{q_2}$, mantenendosi sempre maggiori di N.

Dunque $\frac{p_2}{q_2}$ dev' essere necessariamente una ridotta; il numero n dei nodi compresi fra P_1 e P_2 è il terzo denominatore parziale della frazione continua proposta; le tangenti trigonometriche degli angoli $p_1\,O\,x$, $p'_1\,O\,x$, ec., sono i valori delle ridotte intermedie fra $\frac{p_1}{q_1}$ e $\frac{p_2}{q_2}$.

Procedendo in un modo analogo si possono trovare i valori delle altre ridotte.

316. È possibile determinare geometricamente anche le proprietà delle ridotte. Così p. es., essendo note le ridotte $\frac{p_1}{q_1}$ e $\frac{p_2}{q_2}$, si verifica facilmente che $p_1 q_2 - p_2 q_1 = 1$; ora l'area del triangolo $O\,P_1\,P_2$ è uguale alla metà del primo membro dell'ultima eguaglianza; e questo triangolo è equivalente al triangolo $O\,P_2\,P_3$, che ha per area la metà di $p_3 q_2 - p_2 q_3$; quindi avremo

$$p_3 q_2 - p_2 q_3 = 1.$$

Ma senza trattenerci in altre deduzioni pressochè evidenti, contentiamoci di dimostrare geometricamente il teorema di Lagrange. A tal fine basta provare che se pei punti $p_1, p'_1, \ldots p_1^{(n-2)}$, conduciamo altrettante parallele ad OP_1 e indichiamo con $P_2, p'_2, \ldots. p_2^{(n-2)}, p_2^{(n-1)}$ i punti d'incontro con OP_2, nell'interno dei parallelogrammi

$$OP_1\,p_1\,P_2,\ P_2\,p_1\,p'_1\,p'_2, \ldots. p_1^{(n-2)}\,P_3\,p_2^{(n-1)}\,p_2^{(n-2)},$$

che hanno tutti l'area eguale ad 1, non vi ha alcun nodo. Infatti si ha il seguente teorema:

I parallelogrammi che hanno per vertici quattro nodi e l'area eguale all'unità, non contengono alcun nodo nel loro interno.

E invero se sulle rette OP_1 e OP_2 prendiamo tanti punti rispettivamente distanti fra loro di quantità eguali ad OP_1 e ad OP_2 e per questi punti conduciamo altrettante parallele ad OP_1 e ad OP_2, avremo un nuovo reticolo che avrà i medesimi nodi di quello formato col quadrati. Infatti è chiaro che i nodi di questo nuovo reticolo sono tutti i punti che hanno le coordinate della forma $(m p_1 + n p_2, m q_1 + n q_2)$, ove m ed n sono numeri interi qualunque. Ora un nodo qualunque del primitivo reticolo ha per coordinate (p, q) essendo p e q due interi qualunque. Ma essendo $p_1 q_2 - p_2 q_1 = 1$, potremo sempre determinare due numeri interi m ed n in modo che sia

$$p = m p_1 + n p_2 ,$$

$$q = m q_1 + n q_2 .$$

Dunque i nodi dei due reticoli sono i medesimi, e quindi nell'interno dei parallelogrammi $OP_1 P_2 p_1$ non vi sono nodi

Ora se dal punto P_2 abbassiamo la perpendicolare $P_2 A$ sulla retta Ox e prolunghiamo questa perpendicolare sino a che incontri la retta OR nel punto s, avremo

$$OA = q_2 ,\ AP_2 = p_2 ,\ sP_2 = -(p_2 - q_2 N).$$

Parimente se dal nodo $p_1^{(n-2)}$ abbassiamo la perpendicolare $p_1^{(n-2)} B$ sopra Ox e indichiamo con s_1 il punto in cui essa incontra OR, ponendo

$$OB = \beta ,\ B p_1^{(n-2)} = \alpha ,$$

avremo

$$s_1 p_1^{(n-2)} = \alpha - \beta N.$$

Dico che $s_1 p_1^{(n-2)} > s P_2$.

Conduciamo da P_2 una parallela a OR che incontra $p_1^{(n-2)} B$ nel punto t. I triangoli $P_2 p_1^{(n-2)} t$ e $P_2 Os$ sono eguali fra loro, perchè hanno un lato eguale e gli angoli eguali; quindi

$$P_2 s = p_1^{(n-2)} t < p_1^{(n-2)} s_1 .$$

Dunque astrazion fatta dal segno $p_2 - q_2 N < \alpha - \beta N$.

Questo ragionamento dimostra il teorema di Lagrange, se osserviamo che si ha $\alpha < p_2$, $\beta < q_2$.[1]

317. *La frazione continua*

$$\left(\frac{b_1}{a_1}, \frac{b_2}{a_2}, \frac{b_3}{a_3}, \ldots\right),$$

ove $a_1, a_2, a_3, \ldots$; $b_1, b_2, b_3, \ldots$ *sono numeri interi e positivi, e che soddisfano alla condizione* $a_n \geq b_n$, *ha per valore un numero incommensurabile minore dell'unità.*

Risulta manifestamente dai teoremi precedenti che la frazione continua proposta è convergente ed ha per valore un numero minore dell'unità, poichè essa è minore della sua prima ridotta $\frac{b_1}{a_1}$.

Ciò posto, supponiamo che la frazione continua data abbia per valore un numero commensurabile $\frac{B}{A}$ minore dell'unità; dovremo fare

$$\frac{B}{A} = \left(\frac{b_1}{a_1}, \frac{b_2}{a_2}, \frac{b_3}{a_3}, \ldots\right) < \frac{b_1}{a_1}.$$

Se quindi facciamo

$$C = A\,b_1 - B\,a_1\,,$$

sarà C un numero intero e positivo. Dall'ultima formola si deduce

$$\frac{B}{A} = \frac{b_1}{a_1 + \frac{C}{B}},$$

quindi

$$\frac{C}{B} = \left(\frac{b_2}{a_2}, \frac{b_3}{a_3}, \ldots\right) < \frac{b_2}{a_2}.$$

---

[1] Questa costruzione geometrica ci fu comunicata nell'inverno del 1862 dal Prof. Sylvester, nella sua breve dimora in Pisa. La dimostrazione che ne abbiamo data appartiene al Prof. Betti. Il lettore è pregato a far la figura.

Laonde ponendo

$$D = B b_2 - C a_2 ,$$

sarà D un numero intero e positivo, e avremo

$$\frac{C}{B} = \frac{b_2}{a_2 + \frac{D}{C}} ,$$

da cui

$$\frac{D}{C} = \left(\frac{b_3}{a_3} , \frac{b_4}{a_4} , \ldots \right) < \frac{b_3}{a_3} .$$

Facendo

$$E = C b_3 - D a_3 ,$$

E sarà un numero intero e positivo, e troveremo

$$\frac{E}{D} = \left(\frac{b_4}{a_4} , \frac{b_5}{a_5} , \ldots \right) < \frac{b_4}{a_4} .$$

Continuando a questo modo si vede che avremo una serie infinita e decrescente di numeri interi e positivi $A, B, C, D, E, \ldots$ lo che è impossibile. Dunque la frazione continua data deve avere per valore un numero incommensurabile minore dell' unità.

Giova osservare che se la condizione $a_n \geq b_n$ non si verifica pei primi termini ma a cominciare da un certo valore di n sino all' infinito, il valore della frazione continua sarà sempre un numero irrazionale. Infatti poniamo

$$\frac{1}{R_n} = \left(\frac{b_n}{a_n} , \frac{b_{n+1}}{a_{n+1}} , \ldots \right) ,$$

R_n dev' essere un numero irrazionale maggiore dell' unità, e il valore della frazione continua sarà dato da

$$\frac{R_n P_{n-1} + P_{n-2}}{R_n Q_{n-1} + Q_{n-2}} ;$$

in guisa che se la frazione continua potesse avere un valore commensurabile $\frac{B}{A}$, dovremmo avere

$$\frac{B}{A} = \frac{R_n P_{n-1} + P_{n-2}}{R_n Q_{n-1} + Q_{n-2}} ,$$

da cui

$$R_n = \frac{A P_{n-2} - B Q_{n-2}}{B Q_{n-1} - A P_{n-1}},$$

cioè R_n dovrebb'essere un numero razionale.

Frazioni continue, i cui termini non hanno tutti lo stesso segno.

318. Per quel che abbiamo dimostrato innanzi, le frazioni continue i cui termini non hanno tutti lo stesso segno, possono sempre ridursi alla forma

$$\cfrac{b_1}{a_1 \pm \cfrac{b_2}{a_2 \pm \cfrac{b_3}{a_3 \pm \cdots}}},$$

ove tanto le a quanto le b si considerano come positive.

In questo caso avremo

$$\frac{P_m}{Q_m} = \frac{b_1}{Q_1} \pm \frac{b_1 b_2}{Q_1 Q_2} \pm \frac{b_1 b_2 b_3}{Q_2 Q_3} \pm \cdots \pm \frac{b_1 b_2 \ldots b_m}{Q_{m-1} Q_m}.$$

Siccome questa serie può essere convergente, divergente o indeterminata, così lo stesso può accadere della frazione continua.

Se scriviamo la frazione continua sotto la forma

$$\cfrac{1}{h_1 \pm \cfrac{1}{h_2 \pm \cfrac{1}{h_3 \pm \cdots}}},$$

avremo

$$\frac{P_m}{Q_m} = \frac{1}{q_1} \pm \frac{1}{q_1 q_2} \pm \cdots \pm \frac{1}{q_{m-1} q_m}.$$

Da questa eguaglianza si deduce che tutte le volte che $q_{m-1}\, q_m$

converge verso un limite finito diverso da zero, potremo affermare che la frazione continua non è convergente. Ora è chiaro che se q_m ha un limite finito nell'ipotesi che la frazione continua abbia tutti i termini positivi, a più forte ragione accadrà lo stesso se questa ipotesi non si verifica.

Quindi possiamo dire che *se le serie* (25) *e* (26) *sono entrambe convergenti, la frazione continua proposta non può essere convergente.*

Nel caso generale non vi è altro da aggiungere, la quistione essendo sempre ridotta alla ricerca della natura della serie corrispondente alla frazione continua.

319. Consideriamo ora la frazione continua

$$(A)\qquad \cfrac{b_1}{a_1 - \cfrac{b_2}{a_2 - \cfrac{b_3}{a_3 - \cdots}}}$$

In questo caso abbiamo

$$(B)\qquad \frac{P_m}{Q_m} = \frac{b_1}{Q_1} + \frac{b_1 b_2}{Q_1 Q_2} + \frac{b_1 b_2 b_3}{Q_2 Q_3} + \cdots + \frac{b_1 b_2 \ldots b_m}{Q_{m-1} Q_m}.$$

Se le Q sono tutte positive, la serie non può essere indeterminata, ma solamente convergente o divergente.

Se ora supponiamo che $a_n \geq b_n + 1$, sappiamo che $\frac{P_m}{Q_m}$ è una quantità positiva compresa fra 0 e 1; quindi la frazione continua non può esser divergente; ma la serie corrispondente non può essere indeterminata; talchè avremo il teorema.

La frazione continua (A) *è convergente, se*

$$a_n \geq b_n + 1.$$

Se i numeri che compongono la frazione continua (A) sono interi, basta che si verifichi la condizione $a_n > b_n$.

Se trasformiamo la frazione continua (A) nell' altra

$$(C) \qquad \frac{1}{h_1} - \frac{1}{h_2} - \cdot \cdot \cdot ,$$

il teorema precedente si enuncia.

La frazione continua (C) *è convergente, se*

$$h_n \geq 2.$$

320. Abbiamo veduto che le ridotte corrispondenti alla frazione continua (A), sempreché si verifica la condizione $a_n \geq b_n + 1$, formano una serie crescente; ora l' equazione (B) mostra manifestamente che queste ridotte si mantengono sempre minori del valore della frazione continua. Quindi mentre per le frazioni continue a termini positivi, il valore della frazione continua è sempre compreso fra due ridotte consecutive; per le frazioni continue della forma (A), abbiamo un limite inferiore solamente. Ma è sempre possibile trovare un limite superiore. Infatti indichiamo con N il valore della frazione continua (A), e facciamo

$$R = \left(\frac{b_{n+1}}{a_{n+1}}, -\frac{b_{n+2}}{a_{n+2}}, \ldots \right),$$

R sarà una quantità positiva compresa fra 0 e 1 ed avremo

$$N = \left(\frac{b_1}{a_1}, -\frac{b_2}{a_2}, \ldots - \frac{b_n}{a_n - R}\right),$$

La ridotta $\frac{P_n}{Q_n}$ è minore di N. Formiamo ora la frazione continua

$$(D) \qquad \frac{H_n}{K_n} = \left(\frac{b_1}{a_1}, -\frac{b_2}{a_2}, - \ldots \frac{b_n}{a_n - 1}\right);$$

avremo

$$N = \frac{P_n - R\, P_{n-1}}{Q_n - R\, Q_{n-1}},$$

$$\frac{H_n}{K_n} = \frac{P_n - P_{n-1}}{Q_n - Q_{n-1}};$$

da cui

$$\frac{H_n}{K_n} - N = \frac{(1 - R)(P_n Q_{n-1} - P_{n-1} Q_n)}{K_n (Q_n - R\, Q_{n-1})} > 0,$$

e questa formola mostra chiaramente che la frazione continua (D) è maggiore di N. Dunque N è compreso fra $\frac{P_n}{Q_n}$ e la frazione continua (D).

321. L'espressione $\frac{H_n}{K_n}$ è una quantità positiva, che si avvicina al valore della frazione continua, tanto più quanto più grande è n. Infatti si hanno le relazioni

$$P_n > P_{n-1},\quad Q_n > Q_{n-1},$$

$$\frac{H_{n+1}}{K_{n+1}} - \frac{H_n}{K_n} = \frac{(a_{n+1} - 1) P_n - b_{n+1} P_{n-1}}{(a_{n+1} - 1) Q_n - b_{n+1} Q_{n-1}} - \frac{P_n - P_{n-1}}{Q_n - Q_{n-1}}$$

$$= -\frac{(a_{n+1} - b_{n+1} - 1)(P_n Q_{n-1} - P_{n-1} Q_n)}{K_{n+1} K_n}.$$

Ora se $a_{n+1} > b_{n+1} + 1$, si vede che la differenza precedente è negativa, cioè che le ridotte $\frac{H_n}{K_n}$ diminuiscono al crescere di n, e poichè sono maggiori di N, ne segue che si avvicinano ad N al crescere di n. Se $a_{n+1} = 1 + b_{n+1}$, si ha

$$\frac{H_{n+1}}{K_{n+1}} = \frac{H_n}{K_n}.$$

In quest' ultimo caso il valore della frazione continua è $= 1$. Infatti abbiamo veduto che

$$\frac{P_m}{Q_m}=\frac{P_m}{1+P_m}=\frac{1}{1+\frac{1}{P_m}},$$

e che P_m cresce indefinitamente con m; quindi

$$\lim \frac{P_m}{Q_m}=1.$$

322. *La frazione continua*

$$\left(\frac{b_1}{a_1},-\frac{b_2}{a_2},-\frac{b_3}{a_3}\cdots\right),$$

ove tanto le a *quanto le* b *sono numeri interi e positivi, e si ha* $a_m > b_m$, *non può avere un valore commensurabile eccetto se a partire da una frazione parziale qualunque, si avesse* $a_m = b_m + 1$.

Infatti se la frazione continua proposta non ha per valore un numero incommensurabile, dovremo avere

$$\frac{B}{A}=\left(\frac{b_1}{a_1},-\frac{b_2}{a_2},-\cdots\right)>\frac{b_1}{a_1},$$

ove B ed A sono due numeri interi e positivi e si ha $A > B$. Se poniamo

$$C = B a_1 - A b_1,$$

sarà C un numero intero e positivo, ed avremo

$$\frac{B}{A}=\frac{b_1}{a_1-\frac{C}{B}}.$$

Quindi

$$\frac{C}{B}=\left(\frac{b_2}{a_2},-\frac{b_3}{a_3},-\cdots\right)>\frac{b_2}{a_2},$$

e $B > C$ continuando a questo modo si troverebbe una serie in-

finita e decrescente di numeri interi e positivi, lochè è impossibile. Dunque il valore della frazione continua proposta dev'essere un numero incommensurabile.

Se a cominciare da un certo valore di m si avesse $a_m = b_m + 1$, allora

$$\left(\frac{b_m}{a_m}, -\frac{b_{m+1}}{a_{m+1}}, - \ldots\right) = 1 \,,$$

e la frazione continua proposta avrebbe per valore un numero commensurabile

Osserviamo finalmente che se la condizione $a_m > b_m$, si verifica solo a cominciare da un certo valore di m, la frazione continua sarà sempre eguale a un numero incommensurabile, eccetto se si avesse $a_m = b_m + 1$.

Sullo sviluppo in frazione continua di una data quantità.

323. Supponiamo che sviluppando una quantità qualunque N in frazione continua, si sia trovata una espressione della forma

$$N = \left(\frac{b_1}{a_1}, \frac{b_2}{a_2}, \ldots . \frac{b_n}{a_n + R_n}\right).$$

È di somma importanza per le applicazioni conoscere le condizioni che si debbono verificare affinchè dall' eguaglianza precedente si possa passare all' altra

$$N = \left(\frac{b_1}{a_1}, \frac{b_2}{a_2}, \ldots .\right) = lim \frac{P_m}{Q_m}.$$

A tale oggetto può molto giovare il seguente teorema:

Dal primo valore di N *si può passare al secondo tutte le volte che la frazione continua*

$$\left(\frac{b_1}{a_1}, \frac{b_2}{a_2}, \ldots .\right),$$

è convergente, e che la frazione

$$\frac{Q_m}{Q_{m-1}R_m},$$

ha per limite una quantità differente da -1.

Per dimostrare questo teorema, osserviamo che si ha

$$N=\frac{P_m+R_mP_{m-1}}{Q_m+R_mQ_{m-1}};$$

quindi avremo

$$N-\frac{P_m}{Q_m}=-\frac{\Delta_{m-1}}{1+\frac{Q_m}{Q_{m-1}R_m}}.$$

Ora è chiaro che potremo fare

$$N=\lim\frac{P_m}{Q_m},$$

tutte le volte che si ha

$$\lim\frac{\Delta_{m-1}}{1+\frac{Q_m}{Q_{m-1}R_m}}=0,$$

cioè sempre che sieno verificate le condizioni contenute nell'enunciato del teorema.

324. È facile trovare un limite superiore dell'errore che si commette prendendo invece di N il valore della ridotta n^{esima}, tutte le volte che tanto le a quanto le b sono quantità positive. In questa ipotesi sappiamo infatti che N è sempre compreso fra due ridotte consecutive; quindi l'errore che si cerca sarà sempre minore di

$$\frac{P_{n+1}Q_n-P_nQ_{n+1}}{Q_nQ_{n+1}}=(-1)^n\frac{b_1b_2\ldots b_{n+1}}{Q_nQ_{n+1}}.$$

Laonde possiamo enunciare il seguente teorema:

L'errore che si commette prendendo invece del valore della frazione continua

$$N=\left(\frac{b_1}{a_1},\frac{b_2}{a_2},\ldots\right),$$

la sua ridotta n^{esima}, *nell'ipotesi che le quantità* a *e* b *sieno numeri positivi e che si abbia*

$$b_1\, b_2 \ldots . b_{n+1} \leq 1 ,$$

è minore dell'unità divisa pel prodotto dei denominatori delle ridotte n^{esima} *e* $(n+1)^{esima}$.

Se inoltre si ha $a_n \geq 1$, potremo dire che l'errore è minore del quadrato del denominatore della ridotta n^{esima}.

Frazioni continue periodiche.

325. Una frazione continua si dice *periodica*, se le frazioni parziali corrispondenti si riproducono sempre le stesse e nell'istess'ordine.

Così la frazione continua

$$\left(\frac{2}{3}, \frac{4}{5}, \frac{2}{3}, \frac{4}{5}, \ldots .\right),$$

è periodica.

Una proprietà notevole delle frazioni continue periodiche è contenuta nel seguente teorema:

Ogni frazione continua periodica, che ha per numeratori parziali l'unità e per denominatori parziali numeri interi, è radice di un'equazione di secondo grado.

Consideriamo prima il caso in cui il periodo comincia dal primo termine, cioè che si abbia

$$(1) \qquad x = a_0 + (a_1, a_2, \ldots . a_n, a_0, \ldots .).$$

Questa formola può scriversi

$$x = a_0 + \left(a_1, a_2, \ldots . a_{n-1}, a_n + \frac{1}{x}\right),$$

ovvero

$$x = \frac{p_n x + p_{n-1}}{q_n x + q_{n-1}}.$$

Dall'ultima equazione si deduce

$$(2) \qquad q_n x^2 - (p_n - q_{n-1}) x - p_{n-1} = 0$$

Se $a_0 = 0$, l'equazione che ha per radice la frazione continua

$$(a_1, a_2, \dots a_n, a_1, \dots) ,$$

risulta dalla (2) permutando fra di loro n ed $n-1$.

Supponiamo ora di avere

$$x = a_0 + (a_1, a_2, \dots a_s, y) , \tag{3}$$

ove

$$y = a_{s+1} + (a_{s+2}, \dots a_n, a_{s+1}, \dots). \tag{4}$$

Dalla prima formola ricaviamo

$$x = \frac{p_s y + p_{s-1}}{q_s y + q_{s-1}} ,$$

da cui

$$y = -\frac{q_{s-1} x - p_{s-1}}{q_s x - p_s} .$$

Se ora sostituiamo questo valore di y nella equazione di secondo grado che ha per radice la frazione continua (4), otterremo una nuova equazione di secondo grado che ha per radice la frazione continua (3).

326. È utile osservare che la seconda radice si deduce facilmente dalla prima. Infatti, cominciando dal primo caso, si vede che dall'equazione (1) risulta

$$-a_1 - \left(a_2, a_3, \dots a_n + \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{a_0 - x} ,$$

da cui successivamente

$$-a_2 - \left(a_3, \dots a_n + \frac{1}{x}\right) = (a_1, a_0 - x) ,$$

$$-a_3 - \left(a_4, \dots a_n + \frac{1}{x}\right) = (a_2, a_1, a_0 - x) ,$$

$$\dots\dots\dots\dots ,$$

$$-a_n - \frac{1}{x} = (a_{n-1}, a_{n-2}, \dots a_0 - x) ,$$

e finalmente

$$x = -\frac{1}{a_n + (a_{n-1}, \ldots a_0 - x)}.$$

Se quindi indichiamo con x_1 la prima radice, e con x_2 la seconda, avremo

$$x_1 = a_0 + (a_1, a_2, \ldots a_n, a_0, \ldots),$$

$$x_2 = -\frac{1}{a_n + (a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots a_1, a_0, a_n, \ldots)}.$$

Quindi possiamo dire:

Se una equazione di secondo grado ha una radice eguale ad una frazione continua periodica, nella quale il periodo comincia dal primo termine, l'altra radice si ottiene dividendo -1 *per la frazione continua che ha per periodo gli stessi termini scritti in ordine inverso.*

Passando ora il secondo caso, osserviamo che in virtù di ciò che precede, se la formola (4) è una radice dell'equazione di secondo grado in y, l'altra radice sarà data da

$$y = -\frac{1}{a_n + (a_{n-1}, \ldots a_s, a_{s+1}, a_n, \ldots)}.$$

Sê sostituiamo questi due valori di y nell'equazione (3), avremo le due radici di x.

Dunque possiamo dire in generale *che se una radice di una equazione di secondo grado è una frazione continua periodica, l'altra radice sarà una frazione continua che avrà lo stesso periodo scritto in ordine inverso.*

327. Le ridotte delle frazioni continue periodiche che contengono uno o due elementi, si possono esprimere sotto una forma semplicissima che può tornare utile nelle applicazioni. Supponiamo infatti di avere la frazione continua periodica

$$\left(\frac{a}{b}, \frac{a}{b}, \frac{a}{b}, \ldots\right);$$

dico che il valore di $\frac{P_n}{Q_n}$ è dato dalla formola

$$(5)\quad \frac{P_n}{Q_n} = b\,\frac{a^{n-1} + (n-2)_1 a^{n-3} b + (n-3)_2 a^{n-5} b^2 + \cdots}{a^n + (n-1)_1 a^{n-2} b + (n-2)_2 a^{n-4} b^2 + \cdots}.$$

Questa eguaglianza si verifica facilmente per $n = 2, 3, \ldots$; per mostrare che ha luogo in generale, basta sostituire nell'espressione

$$\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} = \frac{a\,P_n + b\,P_{n-1}}{a\,Q_n + b\,Q_{n-1}},$$

i valori di P_n, P_{n-1}, Q_n e Q_{n-1} e aver presente la nota relazione fra i coefficienti binomiali

$$(m+1)_h = m_h + m_{h-1}.$$

Procedendo a questo modo si trova per $\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}$ una formola che si deduce dalla (5) sostituendo $n+1$ per n.

Se nella formola (5) facciamo $b = 1$, otterremo

$$(6)\quad \frac{p_n}{q_n} = \frac{a^{n-1} + (n-2)_1 a^{n-3} + (n-3)_2 a^{n-5} + \cdots}{a^n + (n-1)_1 a^{n-2} + (n-2)_2 a^{n-4} + \cdots}.$$

che è la ridotta n^{esima} corrispondente alla frazione continua

$$(a, a, a, \ldots).$$

Se la frazione continua è della forma

$$(a, b, a, b, \ldots),$$

si ha

$$(7)\left\{\begin{aligned} \frac{p_{2n-1}}{q_{2n-1}} &= \frac{a^{n-1} b^{n-1} + (2n-3)_1 a^{n-2} b^{n-2} + (2n-4)_2 a^{n-3} b^{n-3} + \cdots}{a^n b^{n-1} + (2n-2)_1 a^{n-1} b^{n-2} + (2n-3)_2 a^{n-2} b^{n-3} + \cdots}, \\ \frac{p_{2n}}{q_{2n}} &= \frac{a^{n-1} b^n + (2n-2)_1 a^{n-2} b^{n-1} + (2n-3)_2 a^{n-3} b^{n-2} + \cdots}{a^n b^n + (2n-1)_1 a^{n-1} b^{n-1} + (2n-2)_2 a^{n-2} b^{n-2} + \cdots}. \end{aligned}\right.$$

Queste formole si verificano facilmente pei valori 1, 2, 3,.... di n; per dimostrarle in generale si prendono le formole

$$\frac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}}=\frac{a\,p_{2n}+p_{2n-1}}{a\,q_{2n}+q_{2n-1}},$$

$$\frac{p_{2n+2}}{p_{2n+2}}=\frac{b\,p_{2n+1}+p_{2n}}{b\,q_{2n+1}+q_{2n}},$$

e si sostituiscono per $p_{2n}, p_{2n-1}, q_{2n}, q_{2n-1}$, i valori corrispondenti; le formole che si trovano a questo modo si deducono dalle (7), sostituendo $n+1$ per n.

328. Come applicazione delle formole precedenti, proponiamoci di svolgere in frazione continua la radice quadrata del numero intero N. Indichiamo con a^2 il massimo quadrato contenuto in N e con b la differenza fra N e a^2, in modo che avremo

$$\sqrt{N}=\sqrt{a^2+b}.$$

Potremo sempre fare

$$\sqrt{a^2+b}=a+\frac{1}{y},$$

da cui

$$\frac{1}{y}=\frac{b}{\sqrt{a^2+b}+a}=\frac{b}{2a+\frac{1}{y}},$$

in guisa che troveremo

$$\sqrt{a^2+b}=a+\cfrac{b}{2a+\cfrac{b}{2a+\cfrac{b}{2a+\cfrac{1}{y}}}}.$$

Tutte le volte che b è una quantità positiva, la serie (25) del n° 308 che in questo caso si riduce a

$$\frac{2a}{b}+\frac{2a}{b}+\frac{2a}{b}+\cdots$$

è divergente; quindi la frazione continua proposta è convergente, e perciò avremo

$$\sqrt{a^2+b}=a+\left(\frac{b}{2a},\ \frac{b}{2a},\ \frac{b}{2a},\ \ldots\ldots\right),$$

o anche

$$\sqrt{a^2+b}=a+\cfrac{1}{\cfrac{2a}{b}+\cfrac{1}{2a+\cfrac{1}{\cfrac{2a}{b}+\cdots}}}$$

Se $b=1$, avremo

$$\sqrt{a^2+1}=a+(2a,\ 2a,\ 2a\ldots\ldots).$$

Giovandoci delle formole (5) e (6), potremo scrivere approssimativamente

$$\sqrt{a^2+b}=a+b\,\frac{(2a)^{n-1}+(n-2)_1(2a)^{n-3}b+(n-3)_2(2a)^{n-5}b^2+\cdots}{(2a)^n+(n-1)_1(2a)^{n-2}b+(n-2)_2(2a)^{n-4}b^2+\cdots},$$

$$\sqrt{a^2+1}=a+\frac{(2a)^{n-1}+(n-2)_1(2a)^{n-3}+(n-3)_2(2a)^{n-5}+\cdots}{(2a)^n+(n-1)_1(2a)^{n-2}+(n-2)_2(2a)^{n-4}+\cdots}.$$

Così p. es. si ha

$$\sqrt{10}=3+(6,\ 6,\ 6,\ \ldots\ldots)$$

$$=3+\frac{6^{n-1}+(n-2)_1 6^{n-3}+(n-3)_2 6^{n-5}+\cdots}{6^n+(n-1)_1 6^{n-2}+(n-2)_2 6^{n-4}+\cdots}.$$

Se prendiamo $n=4$, troveremo

$$\sqrt{10}=3+\frac{228}{1405}=3,\ 162\ 2775\ \ldots\ldots$$

L'errore è minore di

$$\frac{1}{1405\times 8658}<0,\ 000\ 0001.$$

Se b è negativo, avremo

$$\sqrt{a^2-b}=a-\cfrac{b}{2a-\cfrac{b}{2a-\cfrac{b}{2a-\cfrac{1}{y}}}}.$$

Affinchè il secondo membro possa protrarsi indefinitamente, è indispensabile che la frazione continua sia convergente, lo che ha certamente luogo se $2a>b$; e di più bisogna che y ovvero $\sqrt{a^2-b}-a$ sia differente dall'unità. Entrambe le condizioni saranno soddisfatte se si ha

$$2a>b+1.$$

In questa ipotesi potremo fare

$$\sqrt{a^2-b}=a-\left(\frac{b}{2a},-\frac{b}{2a},-\frac{b}{2a},\ldots\right),$$

$$\sqrt{a^2-1}=a-(2a,-2a,-2a,\ldots),$$

o anche

$$\sqrt{a^2-b}=a-b\,\frac{(2a)^{n-1}-(n-2)_1(2a)^{n-3}b+(n-3)_2(2a)^{n-5}b^2-\ldots}{(2a)^n-(n-1)_1(2a)^{n-2}b+(n-2)_2(2a)^{n-4}b^2-\ldots},$$

$$\sqrt{a^2-1}=a-\frac{(2a)^{n-1}-(n-2)_1(2a)^{n-3}+(n-3)_2(2a)^{n-5}-\ldots}{(2a)^n-(n-1)_1(2a)^{n-2}+(n-2)_2(2a)^{n-4}-\ldots}.$$

329. Ai medesimi risultati si giunge considerando l'equazione di secondo grado che ha l'unità per coefficiente del primo termine e numeri interi per coefficienti degli altri termini. Supponiamo infatti di avere l'equazione

$$x^2+ax=b,$$

ove a e b sono numeri interi e positivi; indicando con x_1 e x_2 le due radici, avremo

$$x_1=-\frac{a}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}a^2+b},\quad x_2=-\frac{a}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}a^2+b}.$$

Applicando le formole precedenti, troveremo

$$x_1 = \left(\frac{b}{a}, \frac{b}{a}, \frac{b}{a}, \dots\right),$$

$$x_2 = -a - \left(\frac{b}{a}, \frac{b}{a}, \frac{b}{a}, \dots\right).$$

Se prendiamo in luogo della frazione continua che è nei secondi membri, la ridotta n^{esima}, potremo fare approssimativamente

$$x_1 = b\,\frac{a^{n-1} + (n-2)_1 a^{n-3} b + (n-3)_2 a^{n-5} b^2 + \dots}{a^n + (n-1)_1 a^{n-2} b + (n-2)_2 a^{n-4} b^2 + \dots},$$

$$x_2 = -a - b\,\frac{a^{n-1} + (n-2)_1 a^{n-3} b + \dots}{a^n + (n-1)_1 a^{n-2} b + \dots}.$$

Se a e b sono entrambe negative, cioè se l'equazione è della forma

$$x^2 - a x = -b,$$

avremo

$$x_1 = \frac{a}{2} + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b}, \quad x_2 = \frac{a}{2} - \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b},$$

e per conseguenza, tutte le volte che è soddisfatta la condizione $2a > b + 1$, si ha

$$x_1 = a - \left(\frac{b}{a}, \frac{b}{a}, \frac{b}{a}, \dots\right),$$

$$x_2 = \left(\frac{b}{a}, \frac{b}{a}, \frac{b}{a}, \dots\right);$$

e approssimativamente

$$x_1 = a - b\,\frac{a^{n-1} - (n-2)_1 a^{n-3} b + \dots}{a^n - (n-1)_1 a^{n-2} b + \dots},$$

$$x_2 = b\,\frac{a^{n-1} - (n-2)_1 a^{n-3} b + \dots}{a^n - (n-1)_1 a^{n-2} b + \dots}.$$

CAPITOLO XIV.

RIDUZIONE DELLE FRAZIONI CONTINUE IN SERIE E IN PRODOTTI INFINITI E VICEVERSA.

Riduzione delle frazioni continue in serie e viceversa.

330. L'identità

$$(1)\qquad \left(\frac{b_1}{a_1}, \frac{b_m}{a_m}\right) = \frac{b_1}{Q_1} - \frac{b_1\, b_2}{Q_1\, Q_2} + \cdots + (-1)^{m+1} \frac{b_1\, b_2 \ldots b_m}{Q_{m-1}\, Q_m},$$

che abbiamo trovato nel n° 301, e che è dovuta ad Eulero, può servire utilmente alla riduzione delle frazioni continue in serie e viceversa. Ma prima di giovarcene a tale uso, la trasformeremo in modo da ottenerne altre identità, le quali, a seconda dei casi particolari, si possono prestare meglio alle applicazioni.

Se facciamo

$$u_n = \frac{b_1\, b_2 \ldots b_m}{Q_{m-1}\, Q_m} = u_{n-1}\, b_n \frac{Q_{n-2}}{Q_n},$$

avremo

$$u_{n-1} - u_n = \frac{u_{n-1}}{Q_n} (Q_n - b_n\, Q_{n-2}),$$

che, avuto riguardo alla equazione

$$Q_n = a_n\, Q_{n-1} + b_n\, Q_{n-2}.$$

diventa

$$u_{n-1} - u_n = u_{n-1}\, a_n \frac{Q_{n-1}}{Q_n}.$$

Dall' ultime formole si deduce

$$(a) \qquad a_n \frac{u_n}{u_{n-1} - u_n} = b_n \frac{Q_{n-2}}{Q_{n-1}}.$$

Ciò posto per vedere ciò che diventa il primo membro dell' equazione (1), consideriamo il caso di $m = 4$; avremo

$$\left(\frac{b_1}{a_1}, \frac{b_2}{a_2}, \frac{b_3}{a_3}, \frac{b_4}{a_4}\right)$$

$$= \left(\frac{u_1 a_1}{a_1}, \frac{a_1 b_2}{a_1 a_2}, \frac{a_1 b_3}{a_3}, \frac{b_4}{a_4}\right)$$

$$= \left(\frac{u_1}{1}, \frac{b_2}{a_1 a_2}, \frac{a_1 b_3}{a_3}, \frac{b_4}{a_4}\right).$$

Sostituendo in questa formola il valore di b_2 che si deduce dall' eguaglianza $(a)_1$ avremo

$$\left(\frac{b_1}{a_1}, \frac{b_4}{a_4}\right) = \left(\frac{u_1}{1}, \frac{a_1 a_2 \frac{u_2}{u_1 - u_2}}{a_1 a_2}, \frac{a_1 a_2 b_3}{a_2 a_3}, \frac{a_2 b_4}{a_4}\right)$$

$$= \left(\frac{u_1}{1}, \frac{u_2}{u_1 - u_2}, \frac{b_3 (u_1 - u_2)}{a_2 a_3}, \frac{a_2 b_4}{a_4}\right);$$

ma $u_1 - u_2 = u_1 a_2 \frac{Q_1}{Q_2}$, quindi

$$\left(\frac{b_1}{a_1}, \frac{b_4}{a_4}\right) = \left(\frac{u_1}{1}, \frac{u_2}{u_1 - u_2}, \frac{u_1 a_2 b_3 \frac{Q_1}{Q_2}}{a_2 a_3}, \frac{a_2 b_4}{a_4}\right)$$

$$= \left(\frac{u_1}{1}, \frac{u_2}{u_1 - u_2}, \frac{a_3 \frac{u_1 u_3}{u_2 - u_3}}{a_3}, \frac{a_3 b_4}{a_3 a_4}\right)$$

$$= \left(\frac{u_1}{1}, \frac{u_2}{u_1 - u_2}, \frac{u_1 u_3}{u_2 - u_3} \frac{b_4 (u_2 - u_3)}{a_3 a_4}\right);$$

ma $u_2 - u_3 = u_3 a_3 \frac{Q_2}{Q_3}$; dunque

$$\left(\frac{b_1}{a_1}, \frac{b_4}{u_4}\right) = \left(\frac{u_1}{1}, \frac{u_2}{u_1 - u_2}, \frac{u_1 u_3}{u_2 - u_3}, \frac{u_2 u_4}{u_3 - u_4}\right).$$

Per passare al caso generale, si fa uso del solito ragionamento, mostrando che se la formola è vera per l'indice m, sarà pur vera per l'indice $m + 1$. Operando in tal guisa si vede facilmente che l'identità (1) si trasforma nell'altra

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} & u_1 - u_2 + \cdots + (-1)^{m+1} u_m \\ & = \left(\frac{u_1}{1}, \frac{u_2}{u_1 - u_2}, \frac{u_1 u_3}{u_2 - u_3}, \cdots \frac{u_{m-2} u_m}{u_{m-1} - u_m}\right). \end{aligned} \right.$$

Se dividiamo i due membri di questa identità per u_1, e poi poniamo

$$(-1)^{n+1} \frac{u_{n+1}}{u_1} = v_{n-1}, \quad \frac{v_n}{v_{n-1}} = w_n, \quad \frac{v_1}{1} = w_1,$$

troveremo

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} & 1 + v_1 + v_2 + \cdots + v_{m-1} \\ & = \left(\frac{1}{1}, -\frac{w_1}{w_1 + 1}, -\frac{w_2}{w_2 + 1}, \cdots -\frac{w_{m-1}}{w_{m-1} + 1}\right). \end{aligned} \right.$$

Finalmente se nella formola (2) facciamo $u_n = \frac{1}{\alpha_n}$, avremo

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{\alpha_1} - \frac{1}{\alpha_2} + \frac{1}{\alpha_3} - \frac{1}{\alpha_4} - \cdots (-1)^{m-1} \frac{1}{\alpha_m} \\ & = \left(\frac{1}{\alpha_1}, \frac{\alpha_1^2}{\alpha_2 - \alpha_1}, \frac{\alpha_2^2}{\alpha_3 - \alpha_2}, \cdots \frac{\alpha_{m-1}^2}{\alpha_m - \alpha_{m-1}}\right). \end{aligned} \right.$$

Cambiando in questa formola il segno a tutte le α con indici pari, troveremo

$$(5)\quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \frac{1}{\alpha_3} + \cdots + \frac{1}{\alpha_m} \\ & = \left(\frac{1}{\alpha_1}, - \frac{\alpha_1^2}{\alpha_1 + \alpha_2}, - \frac{\alpha_2^2}{\alpha_2 + \alpha_3}, \cdots - \frac{\alpha_{m-1}^2}{\alpha_{m-1} + \alpha_m} \right). \end{aligned} \right.$$

Le formole precedenti sono identità che valgono per qualunque valore di m; quindi sussisteranno altresì per $m = \infty$; talchè dalla convergenza o divergenza di uno dei due membri, si dedurrà quella dell' altro.

La formola (1) va preferita quando si tratta di ridurre una frazione continua in serie; le altre si usano principalmente per ridurre le serie in frazioni continue.

Esempii. 1°. Ridurre in serie la frazione continua

$$\left(\frac{1}{1}, \frac{1}{1}, \frac{4}{1}, \frac{9}{1}, \ldots \right).$$

In questo caso si ha $a_n = 1$, $b_1 = 1$, $b_n = (n-1)^2$; quindi

$$Q_n = Q_{n-1} + (n-1)^2 Q_{n-2},$$

da cui seguono l' eguaglianze

$$Q_2 = 2 Q_1, \; Q_3 = 3 Q_2, \ldots . Q_n = n Q_{n-1},$$

che moltiplicate insieme danno

$$Q_n = 1 . 2 . 3 \ldots . n.$$

Laonde avremo

$$(-1)^{n+1} \frac{b_1 b_2 \ldots . b_n}{Q_{n-1} Q_n} = (-1)^{n+1} \frac{2^2 . 3^2 \ldots . (n-1)^2}{(1.2 \ldots (n-1))(1.2 \ldots n)} = \frac{(-1)^{n+1}}{n},$$

e per conseguenza

$$\left(\frac{1}{1}, \frac{1}{1}, \frac{4}{1}, \frac{9}{1}, \ldots \right) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = l\,2.$$

2°. Ridurre in frazione continua la serie

$$1+a_1 x+a_1 a_2 x^2+\cdots$$

Nella formola (3) facendo

$$v_n=a_1 a_2 \ldots . a_n x^n ,$$

troveremo

$$1+a_1 x+a_1 a_2 x^2+\cdots+a_1 a_2 \ldots . a_{m-1} x^{m-1}$$

$$=\left(\frac{1}{1},-\frac{a_1 x}{a_1 x+1},-\frac{a_2 x}{a_2 x+1}, \ldots .-\frac{a_{m-1} x}{a_{m-1} x+1}\right).$$

Se in questa eguaglianza poniamo $a_n=q^{2n-1}$, otterremo un'altra trasformazione notevole

$$1+q x+q^4 x^2+q^9 x^3+\cdots+q^{(m-1)^2} x^{m-1}$$

$$=\left(\frac{1}{1},-\frac{q x}{q x+1},-\frac{q^3 x}{q^3 x+1}, \ldots .-\frac{q^{2m-3} x}{q^{2m-3} x+1}\right).$$

Se invece facciamo $a_n=q^n$, avremo

$$1+q x+q^3 x^2+\cdots+q^{\frac{m(m-1)}{2}} x^{m-1}$$

$$=\left(\frac{1}{1},-\frac{q x}{q x+1},-\frac{q^2 x}{q^2 x+1}, \ldots .-\frac{q^{m-1} x}{q^{m-1} x+1}\right).$$

3°. Se nella formola (4) e (5) poniamo $\alpha_n=\frac{a_{n-1}}{x^{n-1}}$, avremo

$$\frac{1}{a_0}-\frac{x}{a_1}+\frac{x^2}{a_2}-\frac{x^3}{a_3}+\cdots+(-1)^{m-1} \frac{x^{m-1}}{a_{m-1}}$$

$$=\left(\frac{1}{a_0}, \frac{a_0^2 x}{a_1-a_0 x}, \frac{a_1^2 x}{a_2-a_1 x}, \ldots . \frac{a_{m-2}^2 x}{a_{m-1}-a_{m-2} x}\right),$$

$$\frac{1}{a_0}+\frac{x}{a_1}+\frac{x^2}{a_2}+\cdots+\frac{x^{m-1}}{a_{m-1}}$$

$$=\left(\frac{1}{a_0},-\frac{a_0^2 x}{a_0 x+a_1},-\frac{a_1^2 x}{a_1 x+a_2}, \ldots .-\frac{a_{m-2}^2 x}{a_{m-2} x-a_{m-1}}\right).$$

Facendo in queste ultime formole

$$a_n = b_0 b_1 b_2 \dots b_n\,,$$

troveremo

$$\frac{1}{b_0} - \frac{x}{b_0 b_1} + \frac{x^2}{b_0 b_1 b_2} - \frac{x^3}{b_0 b_1 b_2 b_3} + \dots + (-1)^{m-1} \frac{x^{m-1}}{b_0 b_1 \dots b_{m-1}}$$

$$= \left(\frac{1}{b_0}, \frac{b_0 x}{b_1 - x}, \frac{b_1 x}{b_2 - x}, \dots \frac{b_{m-2} x}{b_{m-1} - x}\right),$$

$$\frac{1}{b_0} + \frac{x}{b_0 b_1} + \frac{x^2}{b_0 b_1 b_2} + \dots + \frac{x^{m-1}}{b_0 b_1 \dots b_{m-1}}$$

$$= \left(\frac{1}{b_0}, -\frac{b_0 x}{b_1 + x}, -\frac{b_1 x}{b_2 + x}, \dots -\frac{b_{m-2} x}{b_{m-1} + x}\right).$$

Se nell' ultima formola facciamo $b_n = \frac{n}{m - n + 1}$, $b_0 = 1$, il primo membro diventa $(1 + x)^m$; in guisa che avremo

$$(1 + x)^m = \left(\frac{1}{1}, -\frac{m x}{m x + 1}, -\frac{1.(m-1)2}{(m-1)x + 2}, \dots -\frac{(m-1)x}{x + m}\right).$$

Questi esempi sono sufficienti per mostrare come si deve procedere per applicare le formole (1), (2), (3), (4) e (5). Una nuova ed ampia sorgente di trasformazioni si ottiene riducendo in frazione continua le serie di Heine e di Gauss. Questa riduzione ci condurrà altresì ad un interessante teorema sui denominatori delle ridotte, dovuto al primo geometra.

Frazioni continue per le serie di Heine e di Gauss.

331. Per semplicità di calcolo faremo

$$(6)\quad \left\{ \begin{aligned} a_{2m+1} &= q^{\beta+m} \frac{(1 - q^{\alpha+m})(1 - q^{\gamma+m-\beta})}{(1 - q^{\gamma+2m})(1 - q^{\gamma+2m+1})}, \\ a_{2m} &= q^{\alpha+m-1} \frac{(1 - q^{\beta+m})(1 - q^{\gamma+m-\alpha})}{(1 - q^{\gamma+2m-1})(1 - q^{\gamma+2m})}. \end{aligned} \right.$$

Ciò posto dall'equazione (11) del n° (246), otterremo facilmente il seguente sistema di formole

$$\varphi(\alpha, \beta+1, \gamma+1) - \varphi(\alpha, \beta, \gamma) = a_1 x\, \varphi(\alpha+1, \beta+1, \gamma+2)\,,$$

$$\varphi(\beta+1, \alpha+1, \gamma+2) - \varphi(\beta+1, \alpha, \gamma+1) = a_2 x\, \varphi(\beta+2, \alpha+1, \gamma+3)\,,$$

$$\varphi(\alpha+1, \beta+2, \gamma+3) - \varphi(\alpha+1, \beta+1, \gamma+2) = a_3 x\, \varphi(\alpha+2, \beta+2, \gamma+4)\,,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$\varphi(\beta+n, \alpha+n, \gamma+2n) - \varphi(\beta+n, \alpha+n-1, \gamma+2n-1)$$
$$= a_{2n} x\, \varphi(\beta+n+1, \alpha+n, \gamma+2n+1)\,,$$

$$\varphi(\alpha+n, \beta+n+1, \gamma+2n+1) - \varphi(\alpha+n, \beta+n, \gamma+2n)$$
$$= a_{2n+1} x\, \varphi(\alpha+n+1, \beta+n+1, \gamma+2n+2).$$

Avendo presente la nota proprietà della serie di Heine che non muta di valore permutando fra di loro i primi due elementi, da queste formole ricaveremo

$$(7)\quad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\varphi(\alpha, \beta+1, \gamma+1)}{\varphi(\alpha, \beta, \gamma)} = \left(\dfrac{1}{1}, \dfrac{a_1 x}{1}, \dfrac{a_2 x}{1}, \dots \dfrac{a_{2n-1} x}{1-R_{2n}}\right), \\ \text{e} \\ \dfrac{\varphi(\alpha, \beta+1, \gamma+1)}{\varphi(\alpha, \beta, \gamma)} = \left(\dfrac{1}{1}, \dfrac{a_1 x}{1}, \dfrac{a_2 x}{1}, \dots \dfrac{a_{2n} x}{1-R_{2n+1}}\right), \end{array} \right.$$

essendo

$$R_{2n} = a_{2n} x \frac{\varphi(\alpha+n, \beta+n+1, \gamma+2n+1)}{\varphi(\alpha+n, \beta+n, \gamma+2n)}\,,$$

$$R_{2n+1} = a_{2n+1} x \frac{\varphi(\alpha+n+1, \beta+n+1, \gamma+2n+2)}{\varphi(\alpha+n, \beta+n+1, \gamma+2n+1)}\,.$$

332. Passiamo ora a cercare i valori dei numeratori e dei denominatori delle ridotte di queste frazioni continue.

Nel Capitolo 10° abbiamo trovato le formole

$$\varphi(\alpha, \beta, \gamma)$$

$$=\varphi(\alpha,\beta+1,\gamma+1)-q^{\beta}\, x\frac{(1-q^{\alpha})(1-q^{\gamma-\beta})}{(1-q^{\gamma})(1-q^{\gamma+1})}\varphi(\alpha+1,\beta+1,\gamma+2),$$

$$\varphi(\alpha, \beta, \gamma)$$

$$=\varphi(\alpha+1,\beta,\gamma+1)-q^{\alpha}\, x\frac{(1-q^{\beta})(1-q^{\gamma-\alpha})}{(1-q^{\gamma})(1-q^{\gamma+1})}\varphi(\alpha+1,\beta+1,\gamma+2);$$

mutando nella seconda β in $\beta+1$, γ in $\gamma+1$, e nella prima α in $\alpha+1$, β in $\beta+1$, γ in $\gamma+2$, avremo

$$\varphi(\alpha, \beta+1, \gamma+1)$$

$$=\varphi(\alpha+1,\beta+1,\gamma+2)-q^{\alpha}\, x\frac{(1-q^{\beta+1})(1-q^{\gamma-\alpha+1})}{(1-q^{\gamma+1})(1-q^{\gamma+2})}\varphi(\alpha+1,\beta+2,\gamma+3),$$

$$\varphi(\alpha+1, \beta+1, \gamma+2)$$

$$=\varphi(\alpha+1,\beta+2,\gamma+3)-q^{\beta+1}\, x\frac{(1-q^{\alpha+1})(1-q^{\gamma-\beta+1})}{(1-q^{\gamma+2})(1-q^{\gamma+3})}\varphi(\alpha+2,\beta+2,\gamma+4).$$

Se nelle due ultime formole sostituiamo $\alpha+1$ per α, $\beta+1$ per β, $\gamma+2$ per γ, troveremo

$$\varphi(\alpha+1, \beta+2, \gamma+3)$$

$$=\varphi(\alpha+2,\beta+2,\gamma+4)-q^{\alpha+1}\, x\frac{(1-q^{\beta+2})(1-q^{\gamma-\alpha+2})}{(1-q^{\gamma+3})(1-q^{\gamma+4})}\varphi(\alpha+2,\beta+3,\gamma+5),$$

$$\varphi(\alpha+2, \beta+2, \gamma+4)$$

$$=\varphi(\alpha+2,\beta+3,\gamma+5)-q^{\beta+2}\, x\frac{(1-q^{\alpha+2})(1-q^{\gamma-\beta+2})}{(1-q^{\gamma+4})(1-q^{\gamma+5})}\varphi(\alpha+3,\beta+3,\gamma+6).$$

Continuando a questo modo, otterremo una serie di formole che, facendo

$$\varphi_{2m}=\varphi(\alpha+m,\ \beta+m,\ \gamma+2m-1),$$

$$\varphi_{2m+1}=\varphi(\alpha+m,\ \beta+m+1,\ \gamma+2m),$$

si possono scrivere semplicemente

$$(a)\quad \begin{cases} \varphi_0 = \varphi_1 - a_1\, x\, \varphi_2 , \\ \varphi_1 = \varphi_2 - a_2\, x\, \varphi_3 , \\ \varphi_2 = \varphi_3 - a_3\, x\, \varphi_4 , \\ \varphi_3 = \varphi_4 - a_4\, x\, \varphi_5 , \\ \varphi_4 = \varphi_5 - a_5\, x\, \varphi_6 , \\ \dots\dots\dots \end{cases}$$

Questo sistema di equazioni è interamente analogo al sistema (19) del Capitolo precedente, colla sola differenza che le μ sono tutte eguali a 1 e $v_n = - a_n\, x$; quindi dovranno altresì aver luogo l'equazioni (20), (21) e (22) di quel Capitolo, in guisa che avremo

$$(8)\quad \begin{cases} Q_n\, \varphi_n - a_n\, x\, Q_{n-1}\, \varphi_{n+1} = \varphi_0 , \\ P_n\, \varphi_n - a_n\, x\, P_{n-1}\, \varphi_{n+1} = \varphi_1 , \\ \varphi_1\, Q_n - \varphi_0\, P_n = a_1\, a_2 \dots a_n\, x^n\, \varphi_{n+1}. \end{cases}$$

Queste equazioni non sono sufficienti per la determinazione di P_n, P_{n-1}, Q_n, Q_{n-1}; ma potremo procurarcene facilmente una quarta. Infatti se facciamo

$$\psi_{2n} = \varphi\,(n - m - \alpha, n - m - \beta, 2n - 2m - \gamma, q, q^{\alpha+\beta-\gamma}\, x) ,$$

$$\psi_{2n+1} = \varphi\,(n + 1 - m - \alpha, n - m - \beta, 2n + 1 - 2m - \gamma, q, q^{\alpha+\beta-\gamma}\, x) ,$$

avremo

$$\psi_0 = \varphi\,(- m - \alpha, - m - \beta, - 2m - \gamma, q, q^{\alpha+\beta-\gamma}\, x) ,$$

$$\psi_1 = \varphi\,(1 - m - \alpha, - m - \beta, 1 - 2m - \gamma, q, q^{\alpha+\beta-\gamma}\, x).$$

Ora se noi sostituiamo nell'equazioni (6)

$- n - \beta$ per α, $- n - \alpha$ per β, $- \gamma - 2n$ per γ, e $q^{\alpha+\beta-\gamma}\, x$,

per x, e indichiamo con a'_m il valore che prende a_m, troveremo

$$a'_{2m+1} = q^{\alpha+n-m-1} \frac{(1-q^{\beta+n-m})(1-q^{\gamma-\alpha+n-m})}{(1-q^{\gamma+2n-2m})(1-q^{\gamma+2n-2m+1})},$$

$$a'_{2m} = q^{\beta+n-m} \frac{(1-q^{\alpha+n-m})(1-q^{\gamma-\beta+n-m})}{(1-q^{\gamma-2n-2m-1})(1-q^{\gamma-2n-2m})}.$$

Da queste formole si deducono le seguenti relazioni:

$$a'_1 = a_{2m},\ a'_2 = a_{2m-1},\ a'_3 = a_{2m-2}, \ldots a'_{2n} = a_1, a'_{2n+1} = a_0.$$

Se quindi facciamo le medesime sostituzioni nell'equazioni (7), troveremo per $\frac{\psi_1}{\psi_0}$ una frazione continua della forma

$$(9) \qquad \left(\frac{1}{1}, -\frac{a_{2m}x}{1}, -\frac{a_{2m-1}x}{1}, \ldots\right).$$

Ciò posto, è manifesto che fra le ψ sussisteranno relazioni analoghe a quelle che hanno luogo fra le φ, che si ottengono sostituendo nelle formule generali del Capitolo precedente le μ eguali a 1 e $v_n = -a_{2m-n+1}x$.

Se indichiamo con A e B il numeratore e il denominatore delle ridotte della frazione continua (9), avremo fra queste quantità tre equazioni analoghe alle (8), l'ultima delle quali è

$$(10) \qquad \psi_1 B_n - A_n \psi_0 = a_{2m} a_{2m-1} \ldots a_{2m+1-n} x^n \psi_{n+1}.$$

Ora se poniamo

$$\frac{P_{2m+1}}{Q_{2m+1}} = \left(\frac{1}{1}, -\frac{a_1 x}{1}, \ldots -\frac{a_{2m} x}{1}\right),$$

per un teorema che abbiamo dimostrato nel Capitolo precedente, avremo

$$\frac{Q_{2m}}{Q_{2m+1}} = \left(\frac{1}{1}, -\frac{a_{2m} x}{1}, \ldots -\frac{a_1 x}{1}\right),$$

$$\frac{P_{2m}}{P_{2m+1}} = \left(\frac{1}{1}, -\frac{a_{2m} x}{1}, \ldots -\frac{a_2 x}{1}\right)$$

Ma la seconda di queste ridotte, secondo le ultime notazioni, è uguale a $\frac{A_{2m+1}}{B_{2m+1}}$, e l'ultima è uguale a $\frac{A_{2m}}{B_{2m}}$; quindi avremo

$$A_{2m+1} = Q_{2m}, \quad A_{2m} = P_{2m},$$
$$B_{2m+1} = Q_{2m+1}, \quad B_{2m} = P_{2m+1}.$$

Se nella formola (10) poniamo una volta $n = 2m + 1$, un'altra volta $n = 2m$ e ci gioviamo delle ultime eguaglianze, otterremo

$$(11) \qquad \psi_1 Q_{2m+1} - \psi_0 Q_{2m} = a_0 a_1 a_2 \ldots a_{2m} x^{2m+1} \psi_{2m+2},$$

$$(12) \qquad \psi_1 P_{2m+1} - \psi_0 P_{2m} = a_1 a_2 \ldots a_{2m} x^{2m} \psi_{2m+1}.$$

Inoltre se nelle prime due dell'equazioni (8) facciamo $n = 2m + 1$, avremo

$$(13) \qquad \varphi_{2m+1} Q_{2m+1} - a_{2m+1} x \varphi_{2m+2} Q_{2m} = \varphi_0,$$

$$(14) \qquad \varphi_{2m+1} P_{2m+1} - a_{2m+1} x \varphi_{2m+2} P_{2m} = \varphi_1.$$

Se moltiplico l'ultima equazione per ψ_1, la (12) per φ_{2m+1}, sottraggo l'una dall'altra l'equazioni risultanti, e fo

$$(15) \qquad C = \psi_0 \varphi_{2m+1} - a_{2m+1} x \psi_1 \varphi_{2m+2},$$

trovo

$$C P_{2m} = \varphi_1 \psi_1 - a_1 a_2 \ldots a_{2m} x^{2m} \varphi_{2m+1} \psi_{2m+1}.$$

Se poi moltiplico l'equazione (12) per $a_{2m+1} x \varphi_{2m+2}$ e la (14) per ψ_0 e sottraggo, trovo

$$C P_{2m+1} = \varphi_1 \psi_0 - a_1 a_2 \ldots a_{2m+1} x^{2m+1} \varphi_{2m+2} \psi_{2m+1}.$$

Operando in un modo analogo sull'equazioni (11) e (13), troveremo

$$C Q_{2m} = \varphi_0 \psi_1 - a_0 a_1 \ldots a_{2m} x^{2m+1} \varphi_{2m+1} \psi_{2m+2},$$
$$C Q_{2m+1} = \varphi_0 \psi_0 - a_0 a_1 \ldots a_{2m+1} x^{2m+2} \varphi_{2m+2} \psi_{2m+2}.$$

Determiniamo ora il valore di C.

Dalle equazioni (a) si ricava

$$-a_{2m+1}\,x\,\varphi_{2m+2}=\varphi_{2m}-\varphi_{2m+1}$$

$$-a_{2m}\,x\,\psi_2=\psi_0-\psi_1\,,$$

da cui

$$C=\psi_1\,\varphi_{2m}+(\psi_0-\psi_1)\,\varphi_{2m+1}\,,$$

ovvero

$$C=\psi_1\,\varphi_{2m}-a_{2m}\,x\,\psi_2\,\varphi_{2m+1}$$

Parimente dalle due formole

$$-a_{2m}\,x\,\varphi_{2m+1}=\varphi_{2m-1}-\varphi_{2m}$$

$$-a_{2m-1}\,x\,\psi_3=\psi_1-\psi_2\,,$$

dedurremo

$$C=\psi_2\,\varphi_{2m-1}-a_{2m-1}\,x\,\psi_3\,\varphi_{2m}.$$

Se ora osserviamo che mutando m in $m-1$, ψ_0 e ψ_1 si mutano rispettivameute in ψ_2 e ψ_3, dal confronto di questa ultima formola con la (15), si deduce che il valore di C non cambia mutando m in $m-1$, cioè per qualunque valore intero di m.

Ma per $q<1$ e $m=\infty$, ψ_0 diventa

$$1-\frac{x}{1-q}+\frac{q\,x^2}{(1-q)(1-q^2)}-\cdots\,,$$

e φ_{2m+1}

$$1+\frac{x}{1-q}+\frac{x^2}{(1-q)(1-q^2)}+\cdots\,,$$

ed il prodotto di queste serie sappiamo (267) essere eguale a 1; quindi $C=1$.

Laonde avremo

$$(16)\quad \begin{cases} P_{2m} = \varphi_1\psi_1 - a_1 a_2 \ldots a_{2m} x^{2m} \varphi_{2m+1}\psi_{2m+1}, \\ P_{2m+1} = \varphi_1\psi_0 - a_1 a_2 \ldots a_{2m+1} x^{2m+1} \varphi_{2m+2}\psi_{2m+1}, \\ Q_{2m} = \varphi_0\psi_1 - a_0 a_1 \ldots a_{2m} x^{2m+1} \varphi_{2m+1}\psi_{2m+2}, \\ Q_{2m+1} = \varphi_0\psi_0 - a_0 a_1 \ldots a_{2m+1} x^{2m+2} \varphi_{2m+2}\psi_{2m+2}. \end{cases}$$

Queste espressioni sono molto complicate; ma per calcolare effettivamente i valori delle P e delle Q, basta eseguire solamente il prodotto delle due prime serie, ed arrestare questo prodotto al termine che contiene la potenza $(m-1)^{esima}$ o m^{esima} di x, secondochè si tratta della prima formola o delle altre. Infatti dalle formole

$$P_n = P_{n-1} - a_n x P_{n-2},$$

$$Q_n = Q_{n-1} - a_n x Q_{n-2},$$

apparisce manifesto che le quantità P_{2m}, P_{2m+1}, Q_{2m}, Q_{2m+1} sono funzioni razionali ed intere di x, la prima delle quali è di grado $(m-1)^{esimo}$ e le altre sono di grado m^{esimo}.

333. Le formole (16) mostrano chiaramente che le quantità Q convergono verso limiti finiti al crescere di m. Ma le quantità a convergono a zero, quindi la differenza fra due ridotte consecutive ha per limite zero e per conseguenza la frazione continua proposta è convergente. Inoltre il resto

$$a_{2n} \frac{\varphi(\alpha+n, \beta+n+1, \gamma+2n+1)}{\varphi(\alpha+n, \beta+n, \gamma+2n)},$$

converge altresì a zero. Dunque dalle formole (7) potremo dedurre

$$\frac{\varphi(\alpha, \beta+1, \gamma+1)}{\varphi(\alpha, \beta, \gamma)} = \left(\frac{1}{1}, -\frac{a_1 x}{1}, -\frac{a_2 x}{1}, -\cdots\right).$$

334. Se nelle formole precedenti poniamo $\beta = 0$, $\gamma - 1$ per γ, troveremo, poichè $\varphi(\alpha, 0, \gamma) = \varphi_0 = 1$,

$$\varphi(\alpha, 1, \gamma) = \left(\frac{1}{1}, -\frac{b_1 x}{1}, -\frac{b_2 x}{1}, -\dots\right),$$

$$b_{2m+1} = q^m \frac{(1 - q^{\alpha+m})(1 - q^{\gamma+m-1})}{(1 - q^{\gamma+2m-1})(1 - q^{\gamma+2m})},$$

$$b_{2m} = q^{\alpha+m-1} \frac{(1 - q^m)(1 - q^{\gamma-\alpha+m-1})}{(1 - q^{\gamma+2m-2})(1 - q^{\gamma+2m-1})},$$

$$P_{2m} = \varphi'_1 \psi'_1 - b_1 b_2 \dots b_{2m} x^{2m} \varphi'_{2m+1} \psi'_{2m+1},$$

$$P_{2m+1} = \varphi'_1 \psi'_0 - b_1 b_2 \dots b_{2m+1} x^{2m+1} \varphi'_{2m+2} \psi'_{2m+1},$$

$$Q_{2m} = \psi'_1 = \varphi(1 - m - \alpha, -m, 2 - 2m - \gamma, q, q^{\alpha-\gamma+1} x),$$

$$Q_{2m+1} = \psi'_0 = \varphi(-m - \alpha, -m, 1 - 2m - \gamma, q, q^{\alpha-\gamma+1} x);$$

ove gli apici che abbiamo posti alle funzioni φ e ψ, indicano i valori che prendono queste quantità nel caso presente.

Dalle due ultime formole si deduce il seguente teorema:

I denominatori delle ridotte che si ottengono riducendo in frazione continua la serie $\varphi(\alpha, 1, \gamma)$ sono serie della stessa forma.

335. Le formole (6) e (7) nell'ipotesi di $q = 1$, diventano

$$c_{2m+1} = \frac{(\alpha + m)(\gamma - \beta + m)}{(\gamma + 2m)(\gamma + 2m + 1)},$$

$$c_{2m} = \frac{(\beta + m)(\gamma - \alpha + m)}{(\gamma + 2m - 1)(\gamma + 2m)},$$

$$\frac{F(\alpha, \beta + 1, \gamma + 1)}{F(\alpha, \beta, \gamma)} = \left(\frac{1}{1}, -\frac{c_1 x}{1}, -\frac{c_2 x}{1}, \dots - \frac{c_{2n-1} x}{1 - R_{2n}}\right),$$

$$\frac{F(\alpha, \beta + 1, \gamma + 1)}{F(\alpha, \beta, \gamma)} = \left(\frac{1}{1}, -\frac{c_1 x}{1}, -\frac{c_2 x}{1}, \dots - \frac{c_{2n} x}{1 - R_{2n+1}}\right),$$

$$R_{2n} = c_{2n} x \frac{F(\alpha + n, \beta + n + 1, \gamma + 2n + 1)}{F(\alpha + n, \beta + n, \gamma + 2n)},$$

$$R'_{2n+1} = c_{2n+1} x \frac{F(\alpha + n + 1, \beta + n + 1, \gamma + 2n + 2)}{F(\alpha + n, \beta + n + 1, \gamma + 2n + 1)}$$

Nel caso presente si ha per $m=\infty$

$$\lim c_{2m+1}=\lim c_{2m}=\frac{1}{4},$$

in guisa che

$$\lim (c_1 c_2 \ldots . c_m)=0.$$

Prima di sostituire $q=1$, nei valori generali di P_{2m}, Q_{2m} ec., bisogna provare che la quantità C del n° 332 è uguale a 1, anche nell'ipotesi di $q=1$. Infatti il valore di C per la serie ipergeometrica ha la forma

$$C=F(-m-\alpha,-m-\beta,-2m-\gamma)\times F(\alpha+m,\beta+m+1,\gamma+2m)$$
$$-c_{2m+1}xF(1-m-\alpha,-m-\beta,1-2m-\gamma)\times F(\alpha+m+1,\beta+m+1,\gamma+2m+1).$$

Se eseguiamo i prodotti indicati e ordiniamo il secondo membro secondo le potenze di x, i coefficienti di queste potenze saranno funzioni razionali di m, le quali, per ciò che abbiamo dimostrato nel n° 332, restano immutate per tutti i valori interi di m, e per conseguenza per qualunque valore di m.(¹) Quindi possiamo fare $m=-\alpha$, ed allora $c_{2m+1}=0$ e $C=1$.

Ciò posto, i valori di P_{2m}, P_{2m+1}, Q_{2m}, Q_{2m+1}, diventano nel nostro caso

$$P_{2m}=F_1 f_1-c_1 c_2 \ldots . c_{2m}\, x^{2m}\, F_{2m+1} f_{2m+1},$$
$$P_{2m+1}=F_1 f_0-c_1 c_2 \ldots . c_{2m+1}\, x^{2m+1}\, F_{2m+2} f_{2m+1},$$
$$Q_{2m}=F_0 f_1-c_0 c_1 \ldots . c_{2m}\, x^{2m+1}\, F_{2m+1} f_{2m+2},$$
$$Q_{2m+1}=F_0 f_0-c_0 c_1 \ldots . c_{2m+1}\, x^{2m+2}\, F_{2m+2} f_{2m+2},$$

e si ha

$$F_{2m}=F(\alpha+m,\beta+m,\gamma+2m-1,x),$$
$$F_{2m+1}=F(\alpha+m,\beta+m+1,\gamma+2m,x),$$
$$f_{2n}=F(n-m-\alpha,n-m-\beta,2n-2m-\gamma,x),$$
$$f_{2n+1}=F(n+1-m-\alpha,n-m-\beta,2n+1-2m-\gamma,x),$$

(¹) Questa conseguenza dipende da un teorema che daremo nella Seconda Parte.

336. Facendo nelle formole precedenti $\beta = 0$, e sostituendo $\gamma - 1$ per γ, troveremo le seguenti

$$d_{2m+1} = \frac{(\alpha + m)(\gamma + m - 1)}{(\gamma + 2m - 1)(\gamma + 2m)},$$

$$d_{2m} = \frac{m(\gamma - \alpha + m - 1)}{(\gamma + 2m - 2)(\gamma + 2m - 1)},$$

$$F(\alpha, 1, \gamma, x) = \left(\frac{1}{1}, -\frac{d_1 x}{1}, -\frac{d_2 x}{1}, \ldots - \frac{d_{2n-1} x}{1 - R_{2n}}\right),$$

$$F(\alpha, 1, \gamma, x) = \left(\frac{1}{1}, -\frac{d_1 x}{1}, -\frac{d_2 x}{1}, \ldots - \frac{d_{2n} x}{1 - R_{2n+1}}\right),$$

$$R_{2n} = d_{2n} x \frac{F(\alpha + n, n + 1, \gamma + 2n)}{F(\alpha + n, n, \gamma + 2n - 1)},$$

$$R_{2n+1} = d_{2n+1} x \frac{F(\alpha + n + 1, n + 1, \gamma + 2n + 1)}{F(\alpha + n, n + 1, \gamma + 2n)},$$

$$P_{2m} = F'_1 f'_1 - d_1 d_2 \ldots d_{2m} x^{2m} F'_{2m+1} f'_{2m+1},$$

$$P_{2m+1} = F'_1 f'_0 - d_1 d_2 \ldots d_{2m+1} x^{2m+1} F'_{2m+2} f'_{2m+1},$$

$$Q_{2m} = F(1 - m - \alpha, -m, 2n + 2 - 2m - \gamma, x)$$

$$= 1 + \sum_1^\infty (-1)^n m_n \frac{(\alpha + m - 1)_n}{(\gamma + 2m - 2)_n} x^n,$$

$$Q_{2m+1} = F(-m-\alpha, -m, 1-2m-\gamma, x) = 1 + \sum_1^\infty (-1)^n m_n \frac{(\alpha+m)_n x^n}{(\gamma+2m-1)_n},$$

ove F' e f' indicano i valori che prendono F e f dopo fatte le sostituzioni richieste, e m_n e $(\alpha + m - 1)_n$, ec., sono coefficienti binomiali.

Dalle due ultime formole risulta che:

I denominatori delle ridotte che si ottengono riducendo in frazione continua la serie ipergeometrica F $(\alpha, 1, \gamma)$, *sono serie ipergeometriche.*

Diamo qualche applicazione delle formole precedenti.

337. Poniamo nelle ultime formole $\gamma=1$, $\alpha=k$ e $\frac{x}{k}$, invece di x, e poi facciamo $k=\infty$, troveremo

$$F\left(k, 1, 1, \frac{x}{k}\right)=e^x, \text{[1]}$$

$$d_{2m}\, x=-\frac{x}{2(2m-1)}, \quad d_{2m+1}\, x=\frac{x}{2(2m+1)}.$$

$$Q_{2m}=1+\sum_1^\infty(-1)^n \frac{m_n}{(2m-1)_n} \cdot \frac{x^n}{1 \cdot 2 \ldots \ldots n},$$

$$Q_{2m+1}=1+\sum_1^\infty(-1)^n \frac{m_n}{(2m)_n} \cdot \frac{x^n}{1 \cdot 2 \ldots n}.$$

Se nelle due ultime formole facciamo $m=\infty$, otterremo due serie convergenti indipendentemente dal valore di x. Inoltre le quantità d convergono a zero al crescere di m, dunque la frazione continua corrispondente ad e^x è convergente.

Ma si ha

$$F\left(k+n, n+1, 2n+1, \frac{x}{k}\right)=1+\frac{n+1}{2n+1} x+\frac{(n+1)(n+2)}{(2n+1)(2n+2)} \frac{x^2}{1 \cdot 2}+\cdots;$$

la quale serie per $n=\infty$ diventa

$$1+\frac{1}{2} \cdot \frac{x}{1}+\frac{1}{2^2} \cdot \frac{x^2}{1 \cdot 2}+\frac{1}{2^3} \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3}+\cdots,$$

che è altresì convergente per qualunque valore di x.

Lo stesso accade della serie

$$F\left(k+n, n, 2n, \frac{x}{k}\right);$$

quindi il resto

$$d_{2n}\, x \frac{F(\alpha+n, n+1, 2n+1)}{F(\alpha+n, n, 2n)},$$

---

[1] Per dimostrare questa formola rigorosamente, bisogna ragionare come nel n° 175. Quest' avvertenza vale per tutti i casi simili.

converge a zero al crescere di n. Le condizioni contenute nel teorema (323) essendo dunque soddisfatte, potremo scrivere

$$e^x = \left(\frac{1}{1}, -\frac{x}{1}, +\frac{x}{2}, -\frac{x}{2.3}, -\frac{2x}{3.4}, +\frac{2x}{4.5}, \ldots\right),$$

che facilmente si riduce alla forma

$$e^x = \left(\frac{1}{1}, -\frac{x}{1}, +\frac{x}{2}, -\frac{x}{3}, +\frac{x}{2}, -\frac{x}{5}, +\frac{x}{2}, \ldots\right).$$

Se in questa formola poniamo $x = 1$, otterremo il valore di e in frazione continua

$$e = \left(\frac{1}{1}, -\frac{1}{1}, +\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, +\frac{1}{2}, -\frac{1}{5}, +\frac{1}{2}, \ldots\right).$$

I valori di P_{2m} e di P_{2m+1}, per una osservazione precedente, si trovano facendo i due prodotti

$$F\left(k, 1, 1, \frac{x}{k}\right) \times F\left(-k, -m, 1-2m, \frac{x}{k}\right),$$

e

$$F\left(k, 1, 1, \frac{x}{k}\right) \times F\left(-k, -m, -2m, \frac{x}{k}\right),$$

e arrestando il primo prodotto alla potenza $(m-1)^{esima}$ e il secondo alla potenza m^{esima}.

Così per avere P_{2m} dobbiamo fare il prodotto delle due serie

$$1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \cdots + \frac{x^\mu}{1.2\ldots\mu},$$

$$1 + \frac{m}{1-2m}\frac{x}{1} + \cdots + \frac{m(m-1)\ldots(m-\mu+1)}{(1-2m)\ldots(\mu-2m)}\frac{x^\mu}{1.2\ldots\mu}.$$

Il coefficiente di x^μ in questo prodotto, sarà

$$\frac{m(m-1)\ldots(m-\mu+1)}{(1-2m)\ldots(\mu-2m)\,\Pi\mu}+\frac{m(m-1)\ldots(m-\mu+2)}{(1-2m)\ldots(\mu-1-2m)\,\Pi(\mu-1)}$$

$$+\frac{m(m-1)\ldots(m-\mu+3)}{(1-2m)\ldots(\mu-2-2m)\,\Pi(\mu-2)}$$

$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+\frac{1}{\Pi\mu},$$

ovvero

$$\frac{m(m-1)\ldots(m-\mu+1)}{(1-2m)\ldots(\mu-2m)\,\Pi\mu}$$

$$\left[1+\frac{\mu(\mu-2m)}{1.(m-\mu+1)}+\frac{\mu(\mu-1)(\mu-2m)(\mu-2m-1)}{1.2(m-\mu+1)(m-\mu+2)}\right.$$

$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\left.+\frac{(1-2m)\ldots(\mu-2m)}{m(m-1)\ldots(m-\mu+1)}\right].$$

Ma la quantità fra parentesi è uguale a

$$F(-\mu, 2m-\mu, m-\mu+1, 1),$$

e nel n° (247), abbiamo trovato, che

$$F(-\mu, 2m-\mu, m-\mu+1, 1)=\frac{(1-m)(2-m)\ldots(\mu-m)}{m(m-1)\ldots(m-\mu+1)}$$

$$=(-1)^\mu\frac{m-\mu}{m};$$

quindi il coefficiente di x^μ in P_{2m}, è dato da

$$\frac{(m-1)(m-2)\ldots(m-\mu)}{(2m-1)(2m-2)\ldots(2m-\mu)\,\Pi\mu},$$

e per conseguenza, avremo

$$P_{2m} = 1 + \frac{m-1}{2m-1}\,\frac{x}{1} + \frac{(m-1)(m-2)}{(2m-1)(2m-2)}\,\frac{x^2}{1\,.\,2} + \cdots$$

Al modo stesso si trova

$$P_{2m+1} = 1 + \frac{m}{2m}\,.\,\frac{x}{1} + \frac{m(m-1)}{2m(2m-1)}\,\frac{x^2}{1\,.\,2} + \cdots$$

Dalle formole precedenti apparisce manifesto che al crescere di n, P_n converge verso $e^{\frac{1}{2}x}$ e Q_n verso $e^{-\frac{1}{2}x}$; in guisa che la ridotta $\frac{P_n}{Q_n}$ convergerà verso e^x.

338. La funzione $l(1+x)$ è data dall'espressione

$$x\,F(1,1,2,-x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots ;$$

e si ha

$$d_{2m+1} = \frac{(m+1)(m+1)}{(2m+1)(2m+2)}\,,\quad d_{2m} = \frac{m\,.\,m}{2m(2m+1)}.$$

Dalle ultime formole risulta che

$$lim\; d_{2m} = lim\; d_{2m+1} = \frac{1}{4}\,,$$

$$lim\,(d_1\,d_2 \ldots .\, d_{2m}) = 0.$$

La frazione continua corrispondente alla serie proposta ha la forma

$$\left(\frac{x}{1}, \frac{\frac{1\,.\,1}{1\,.\,2}x}{1}, \frac{\frac{1\,.\,1}{2\,.\,3}x}{1}, \frac{\frac{2\,.\,2}{3\,.\,4}x}{1}, \frac{\frac{2\,.\,2}{4\,.\,5}x}{1}, \ldots .\right).$$

Questa frazione continua è convergente in virtù dell'ultima equazione e perchè i denominatori Q_m delle ridotte crescono con m.

Inoltre osserviamo che la convergenza della frazione continua e l'accennata proprietà della Q sono sufficienti perchè si verifichi il teorema (323) indipendentemente dal valore del resto; in guisa che possiamo scrivere

$$l(1+x)=\left(\frac{x}{1}, \frac{\frac{1 \cdot 1}{1 \cdot 2}x}{1}, \frac{\frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 3}x}{1}, \frac{\frac{2 \cdot 2}{3 \cdot 4}x}{1}, \frac{\frac{2 \cdot 2}{4 \cdot 5}x}{1}, \ldots \right),$$

e questa eguaglianza sussiste per tutti i valori di x che soddisfano alla relazione $1 \geq x > -1$.

I valori di Q_{2m} e di Q_{2m+1} dati dalle formole

$$Q_{2m}=1+\frac{m_1^{\,2}}{(2m)_1}x+\frac{m_2^{\,2}}{(2m)_2}x^2+\frac{m_3^{\,2}}{(2m)_3}x^3 \cdots,$$

$$Q_{2m+1}=1+m_1\frac{(m+1)_1}{(2m+1)_1}x+m_2\frac{(m+1)_2}{(2m+1)_2}x^2+\cdots$$

339. Consideriamo ancora il caso in cui si abbia

$$\alpha=k,\ \beta=-k,\ \gamma=\frac{1}{2},\ x=\left(\frac{x}{2a}\right)^2.$$

Con questi valori troveremo per $k=\infty$

$$F\left(k,-k,\frac{1}{2},\left(\frac{x}{2a}\right)^2\right)=\cos h\, x,$$

$$F\left(k,-k+1,\frac{3}{2},\left(\frac{x}{2a}\right)^2\right)=\frac{\operatorname{sen} h\, x}{x},$$

$$c_{2m}x=-\frac{x^2}{(4m-1)(4m+1)},\ c_{2m+1}=-\frac{x^2}{(4m+1)(4m+3)},$$

$$\frac{\tan h\, x}{x}=\left(\frac{1}{1}, \frac{\frac{x^2}{3}}{1}, \frac{\frac{x^2}{3 \cdot 5}}{1}, \ldots \frac{\frac{x^2}{(4m-3)(4m-1)}}{1+R_{2m}}\right),$$

$$\frac{\tan h\, x}{x}=\left(\frac{1}{1}, \frac{\frac{x^2}{3}}{1}, \frac{\frac{x^2}{3 \cdot 5}}{1}, \ldots \frac{\frac{x^3}{(4m-1)(4m+1)}}{1+R_{2m+1}}\right).$$

In questo esempio non vi è bisogno giovarsi delle formole di Heine per provare che nelle due ultime eguaglianze possiamo protrarre all'infinito le frazioni continue. Infatti è manifesto dalla formola

$$Q_{2m} = Q_{2m-1} + c_{2m}\, Q_{2m-2}\,,$$

che $Q_{2m} > Q_{2m-1}$; di più è chiaro che le c convergono a zero al crescere di m; quindi la differenza fra due ridotte consecutive converge a zero, e per conseguenza la frazione continua è convergente.

I resti

$$R_{2m} = c_{2m}\, x\, \frac{F\left(-k+n+1, -k+n+1, 2n+\frac{5}{2}, \left(\frac{x}{2k}\right)^2\right)}{F\left(-k+n+1, -k+n, 2n+\frac{3}{2}, \left(\frac{x}{k2}\right)^2\right)}\,,$$

$$R_{2m+1} = c_{2m+1}\, x\, \frac{F\left(-k+n+1, -k+n+2, 2n+\frac{7}{2}, \left(\frac{x}{5k}\right)^2\right)}{F\left(-k+n+1, -k+n+1, 2n+\frac{5}{2}, \left(\frac{x}{2k}\right)^2\right)}\,,$$

convergono a zero insieme alle c, poichè i rapporti che sono nei secondi membri, al crescere di n convergono verso 1. Infatti il valore della serie

$$F\left(-k, -k, \gamma, \left(\frac{x}{2k}\right)^2\right) = 1 + \frac{1}{\gamma}\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{1.2.\gamma(\gamma+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^4 + \cdots\,,$$

che è convergente per qualunque valore finito di x, è minore di quello della serie

$$1 + \frac{1}{\gamma}\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{1.2.\gamma^2}\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^4 + \cdots\,,$$

cioè è minore di $e^{\frac{x^2}{4\gamma}}$; la quale quantità al crescere di γ converge verso 1. Dunque a più forte ragione la serie proposta converge verso 1.

In virtù di ciò che precede, potremo scrivere

$$tan\,h\,x = \cfrac{x}{1 + \cfrac{x^2}{3 + \cfrac{x^2}{5 + \cfrac{x^2}{7 + \cdots}}}},$$

Le ridotte di questa frazione continua si ottengono facilmente per mezzo delle formole date nel n° 335.

340. Dall'ultima formola risulta che $tan\,h\,x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^x}$, per ogni valore finito e razionale di x, ha un valore irrazionale. Infatti se facciamo $x = \frac{a}{b}$ ove a e b sono due numeri interi, la frazione continua precedente diverrà

$$\left(\frac{a}{b}, \frac{a^2}{3b}, \frac{a^2}{5b}, \ldots\right),$$

e questa formola mostra manifestamente che, a cominciare da un certo termine, i denominatori parziali sono maggiori dei numeratori corrispondenti; quindi questa frazione continua è uguale un numero irrazionale. Ma si ha

$$1 - \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^x} = \frac{1}{e^{2x} + 1},$$

quindi e^{2x}, e a più forte ragione e^x, deve essere un numero irrazionale. Dunque *qualunque potenza razionale della base dei logaritmi naturali, è un numero irrazionale.*

341. Procedendo in un modo interamente analogo a quello usato nell'esempio precedente, e osservando che la frazione continua

$$\left(\frac{1}{1}, -\frac{x^2}{3}, -\frac{x^2}{5}, -\frac{x^2}{7}, -\ldots\right),$$

è convergente (319) se si ha $x^2 \leq 2$, e che in questa ipotesi i denominatori delle ridotte vanno crescendo, troveremo

$$\frac{F\left(-k,-k+1,\frac{3}{2},\left(\frac{xi}{2k}\right)^2\right)}{F\left(-k,-k,\frac{1}{2},\left(\frac{xi}{2k}\right)^2\right)}=\frac{1}{xi}\frac{e^{xi}-e^{-xi}}{e^{xi}-e^{-xi}}=\frac{tang\, x}{x}$$

$$=\left(\frac{1}{1},-\frac{x^2}{3},-\frac{x^2}{5},-\frac{x^2}{7},-\cdots\right),$$

ove $i=\sqrt{-1}$.

Da questa formola si deduce

$$tang\, x=\left(\frac{x}{1},-\frac{x^2}{3},-\frac{x^2}{5},-,-\frac{x^2}{7},-\cdots\right).$$

Questa eguaglianza non vale solamente per $x^2 \leq 2$, ma per qualunque valore finito di x, poichè sempre a cominciare da una certa frazione parziale, tutte quelle che seguono soddisfaranno alla condizione che i denominatori superano i numeratori corrispondenti per l'unità.

342. Applicando all'ultima formola il teorema del n° 322, si vede che *la tangente di un numero razionale è irrazionale.* Ma $tan\frac{\pi}{4}=1$, dunque $\frac{\pi}{4}$ e per conseguenza π è un numero irrazionale. Dunque *la lunghezza della circonferenza del cerchio che ha per raggio l'unità non può esprimersi mediante un numero razionale.*

Si può dimostrare facilmente che anche il quadrato di π è un numero irrazionale. Infatti l'ultima formola può scriversi

$$1-x\cot x=\left(\frac{x^2}{3},-\frac{x^2}{5},-\frac{x^2}{7},-\cdots\right),$$

la quale per $x=\frac{\pi}{2}$, si riduce a

$$1=\left(\frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}{3},-\frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}{5},-\frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}{7},-\cdots\right).$$

Supponiamo che si abbia $\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 = \frac{a}{b}$, ove a e b sono numeri interi; avremo

$$1 = \left(\frac{a}{3b}, -\frac{ab}{5b}, -\frac{ab}{7b}, - \dots\right).$$

Ma il secondo membro è un numero irrazionale; dunque l'ultima eguaglianza non può sussistere, e per conseguenza π^2 è un numero irrazionale.

Riduzione delle frazioni continue in prodotti infiniti e viceversa.

343. La quistione che forma l'oggetto di questo paragrafo, può essere risoluta in due modi, uno indiretto, l'altro diretto. Il primo consiste nel ridurre la frazione continua o il prodotto infinito in serie, e poi procedere come nel n° 264 o come nei numeri precedenti. Il secondo è fondato sulla seguente identità

$$(1) \qquad \frac{P_m}{Q_m} = \frac{a_0 P_1}{a_0 Q_1} \cdot \frac{P_2 Q_1}{P_1 Q_2} \cdot \frac{P_3 Q_2}{P_2 Q_3} \cdots \frac{P_m Q_{m-1}}{P_{m-1} Q_m},$$

che sussistendo per qualunque valore di m, sussiste altresì per $m = \infty$. Se si conosce che uno dei membri converge verso una quantità finita, ne segue che anche l'altro convergerà verso lo stesso limite.

Quando si vuol ridurre una frazione continua in prodotto infinito, la formola (1) si applica immediatamente, poichè in questo caso si conoscono i valori delle quantità P e Q. Ma se si tratta di risolvere la questione inversa, è utile dare un'altra forma alla identità (1).

Supponiamo di voler trasformare il prodotto infinito

$$1 \cdot \frac{\alpha_1}{\beta_1} \cdot \frac{\alpha_2}{\beta_2} \cdot \frac{\alpha_3}{\beta_3} \cdots$$

in una frazione continua della forma

$$a_0 + \left(\frac{b_1}{a_1}, \frac{b_2}{a_2}, \ldots\right).$$

Confrontando il prodotto infinito col secondo membro della (1) si ha

$$a_0 = 1, \quad P_m Q_{m-1} = \alpha_m, \quad P_{m-1} Q_m = \beta_m.$$

Da queste due formole si ricavano le seguenti

$$P_{2m} = \frac{\alpha_{2m}}{Q_{2m-1}}, \quad \frac{1}{P_{2m-2}}, = \frac{Q_{2m-1}}{\beta_{2m-1}},$$

che moltiplicate insieme danno

$$P_{2m} = \frac{\alpha_{2m}}{\beta_{2m-1}} P_{2m-2}.$$

Sostituendo in questa eguaglianza $m-1$, $m-2, \ldots 3, 2, 1$ invece di m e moltiplicando fra di loro le formole che ne risultano, troveremo

$$P_{2m} = \frac{\alpha_2 \alpha_4 \ldots \alpha_{2m}}{\beta_1 \beta_3 \ldots \beta_{2m-1}}.$$

In un modo analogo si trova

$$Q_{2m} = \frac{\beta_{2m}}{\alpha_{2m-1}} Q_{2m-2},$$

e quindi

$$Q_{2m} = \frac{\beta_2 \beta_4 \ldots \beta_{2m}}{\alpha_1 \alpha_3 \ldots \alpha_{2m-1}}.$$

Similmente si ha

$$P_{2m+1} = \frac{\alpha_1 \alpha_3 \ldots \alpha_{2m+1}}{\beta_2 \beta_4 \ldots \beta_{2m}},$$

$$Q_{2m+1} = \frac{\beta_1 \beta_3 \ldots \beta_{2m+1}}{\alpha_2 \alpha_4 \ldots \alpha_{2m}}.$$

Per ottenere i valori delle a e delle b in funzione delle quantità α, β, ci gioveremo delle formole

$$P_n = a_n P_{n-1} + b_n P_{n-2},$$

$$Q_n = a_n Q_{n-1} + b_n Q_{n-2},$$

dalle quali si deduce

$$a_n = \frac{P_n Q_{n-2} - P_{n-2} Q_n}{P_{n-1} Q_{n-2} - P_{n-2} Q_{n-1}},$$

$$b_n = \frac{P_n Q_{n-1} - P_{n-1} Q_n}{P_{n-2} Q_{n-1} - P_{n-1} Q_{n-2}}.$$

Se in queste formole poniamo per n una volta $2m$, un'altra volta $2m+1$, e poi sostituiamo per le P e le Q i valori dati dalle formole precedenti, troveremo dopo facili riduzioni

$$a_{2m} = \frac{\alpha_2 \ldots \alpha_{2m-2}}{\alpha_1 \ldots \alpha_{2m-1}} \cdot \frac{\beta_2 \ldots \beta_{2m-2}}{\beta_1 \ldots \beta_{2m-1}} \cdot \frac{\alpha_{2m}\alpha_{2m-1} - \beta_{2m}\beta_{2m-1}}{\alpha_{2m-1} - \beta_{2m-1}},$$

$$a_{2m+1} = \frac{\alpha_1 \ldots \alpha_{2m-1}}{\alpha_2 \ldots \alpha_{2m}} \cdot \frac{\beta_1 \ldots \beta_{2m-1}}{\beta_2 \ldots \beta_{2m}} \cdot \frac{\alpha_{2m+1}\alpha_{2m} - \beta_{2m+1}\beta_{2m}}{\alpha_{2m} - \beta_{2m}},$$

$$b_{2m} = -\frac{\alpha_{2m} - \beta_{2m}}{\alpha_{2m-1} - \beta_{2m-1}}, \quad b_{2m+1} = -\frac{\alpha_{2m+1} - \beta_{2m+1}}{\alpha_{2m} - \beta_{2m}}.$$

Da queste formole si possono dedurre i valori di tutte le a e le b, se si osserva che

$$b_1 = \alpha_1 - \beta_1 \text{ e } a_1 = \beta_1.$$

Per vedere la forma che prende la frazione continua per mezzo delle formole precedenti, consideriamo il caso particolare di $m=4$, cioè supponiamo che si abbia

$$\frac{\alpha_1}{\beta_1} \cdot \frac{\alpha_2}{\beta_2} \cdot \frac{\alpha_3}{\beta_3} \cdot \frac{\alpha_4}{\beta_4} = a_0 + \left(\frac{b_1}{a_1}, \frac{b_2}{a_2}, \frac{b_3}{a_3}, \frac{b_4}{a_4}\right).$$

Sostituendo per le a le b i valori che si deducono dall' equazioni precedenti, avremo

$$\frac{\alpha_1}{\beta_1}\cdot\frac{\alpha_2}{\beta_2}\cdot\frac{\alpha_3}{\beta_3}\cdot\frac{\alpha_4}{\beta_4}$$

$$=1+\left(\frac{\alpha_1-\beta_1}{\beta_1},-\frac{\dfrac{\alpha_2-\beta_2}{\alpha_1-\beta_1}}{\dfrac{\alpha_2\alpha_1-\beta_2\beta_1}{\alpha_1\beta_1(\alpha_1-\beta_1)}},-\frac{\dfrac{\alpha_3-\beta_3}{\alpha_2-\beta_2}}{\dfrac{\alpha_1\beta_1}{\alpha_2\beta_2}\,\dfrac{\alpha_3\alpha_2-\beta_3\beta_2}{\alpha_2-\beta_2}},-\frac{\dfrac{\alpha_4-\beta_4}{\alpha_3-\beta_3}}{\dfrac{\alpha_2\beta_2}{\alpha_1\alpha_3\beta_1\beta_3}\,\dfrac{\alpha_4\alpha_3-\beta_4\beta_3}{\alpha_3-\beta_3}}\right)$$

$$=1+\left(\frac{\alpha_1-\beta_1}{\beta_1},-\frac{(\alpha_2-\beta_2)\alpha_1\beta_1}{\alpha_2\alpha_1-\beta_2\beta_1},-\frac{\dfrac{(\alpha_1-\beta_1)(\alpha_3-\beta_3)\alpha_1\beta_1}{\alpha_2-\beta_2}}{\dfrac{\alpha_1\beta_1}{\alpha_2\beta_2}\,\dfrac{\alpha_3\alpha_2-\beta_3\beta_2}{\alpha_2-\beta_2}},-\frac{\dfrac{\alpha_4-\beta_4}{\alpha_3-\beta_3}}{\dfrac{\alpha_2\beta_2}{\alpha_1\alpha_3\beta_1\beta_3}\,\dfrac{\alpha_4\alpha_3-\beta_4\beta_3}{\alpha_3-\beta_3}}\right)$$

$$=1+\left(\frac{\alpha_1-\beta_1}{\beta_1},-\frac{(\alpha_2-\beta_2)\alpha_1\beta_1}{\alpha_2\alpha_1-\beta_2\beta_1},-\frac{(\alpha_1-\beta_1)(\alpha_3-\beta_3)\alpha_2\beta_2}{\alpha_3\alpha_2-\beta_3\beta_2},-\frac{(\alpha_2-\beta_2)(\alpha_4-\beta_4)\alpha_3\beta_3}{\alpha_4\alpha_3-\beta_4\beta_3}\right).$$

Se finalmente osserviamo che

$$1+\frac{\alpha_1-\beta_1}{\beta_1-x}=\frac{1}{1-\dfrac{\alpha_1-\beta_1}{\alpha_1-x}},$$

troveremo

$$\frac{\alpha_1}{\beta_1}\cdot\frac{\alpha_2}{\beta_2}\cdot\frac{\alpha_3}{\beta_3}\cdot\frac{\alpha_4}{\beta_4}$$

$$=\left(\frac{1}{1},-\frac{\alpha_1-\beta_1}{\alpha_1},-\frac{(\alpha_2-\beta_2)\alpha_1\beta_1}{\alpha_2\alpha_1-\beta_2\beta_1},-\frac{(\alpha_1-\beta_1)(\alpha_3-\beta_3)\alpha_2\beta_2}{\alpha_3\alpha_2-\beta_3\beta_2},-\frac{(\alpha_2-\beta_2)(\alpha_4-\beta_4)\alpha_3\beta_3}{\alpha_4\alpha_3-\beta_4\beta_3}\right).$$

La formola generale di trasformazione si deduce facilmente dalla precedente, facendo uso del solito ragionamento che abbiamo adoperato in simili casi.

Per altri particolari si possono consultare le Memorie di Stern pubblicate nel *Giornale di Crelle.*

FINE DELLA PARTE PRIMA.

INDICE.

PARTE PRIMA.

ANALISI ALGEBRICA.

Errata-corrige.

Pag.	lin.			
22	8	$\frac{\rho}{\rho'} = \frac{sen\,(\theta' - \varphi)}{sen\,(\varphi - \varphi')}$	*leggi*	$\frac{\rho}{\rho'} = \frac{sen\,(\theta' - \varphi)}{sen\,(\varphi - \theta)}$
27	1	la denominazione		le denominazioni
47	20	di h, k		di k
48	10	$\frac{\beta(\beta+1)(\beta+2)\ldots\ldots(\beta+n-1)}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots\ldots(\alpha+\alpha-1)}$		$\frac{\beta(\beta+1)(\beta+2)\ldots\ldots(\beta+n-1)}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots\ldots(\alpha+n-1)}$
60	20	di x che non sono multipli pari di π		di x
78	25	$U_0 v_{2n} + U_1 v_{2n-1} + \ldots\ldots + U_{n-1} v_{n+1}$		$mod(U_0 v_{2n} + U_1 v_{2n-1} + \ldots\ldots + U_{n-1} v_{n+1})$
82	2	n° 106		n° 100
»	30	$m_5 a_0^{m-5} a$		$m_5 a_0^{m-5} a_1^5$
83	8	a_1		a_0
86	3	$s^n \rho^n$		$s_n \rho^n$
89	18	$u_1 - v_1 < \delta_2 - \delta_1$		$u_1 - v_1 < \delta$
99	3	$\frac{\frac{(1+\delta)^p - 1}{\delta}}{\frac{(1+\delta)^q - 1}{\delta}}$		$\frac{\frac{(1+\delta)^p - 1}{\delta}}{\frac{(1+\varepsilon)^q - 1}{\varepsilon}}$
101	6	$\mu < 1$		$\mu > 1$
117	25	questo modulo		un certo limite
112	5	118		120
»	6	328		130
119	2	$m_{2h+1}\left(\frac{m-2h+1}{2}\right)_{n-h}$		$m_{2h+1}\left(\frac{m-2h-1}{2}\right)_{n-h}$
»	6	$\left(\frac{m-2h+1}{2}\right)_{n-h}$		$\left(\frac{m-2h-1}{2}\right)_{n-h}$
»	12	$\left(\frac{m-2h+1}{2}\right)_{n-h}$		$\left(\frac{m-2h-1}{2}\right)_{n-h}$
166	14	$x \frac{e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}}$		$\frac{x}{2} \frac{e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}}$
219	20	$\sigma n \pm 1$		$6n \pm 1$
403	21	Il teorema (312)		Il teorema (311)